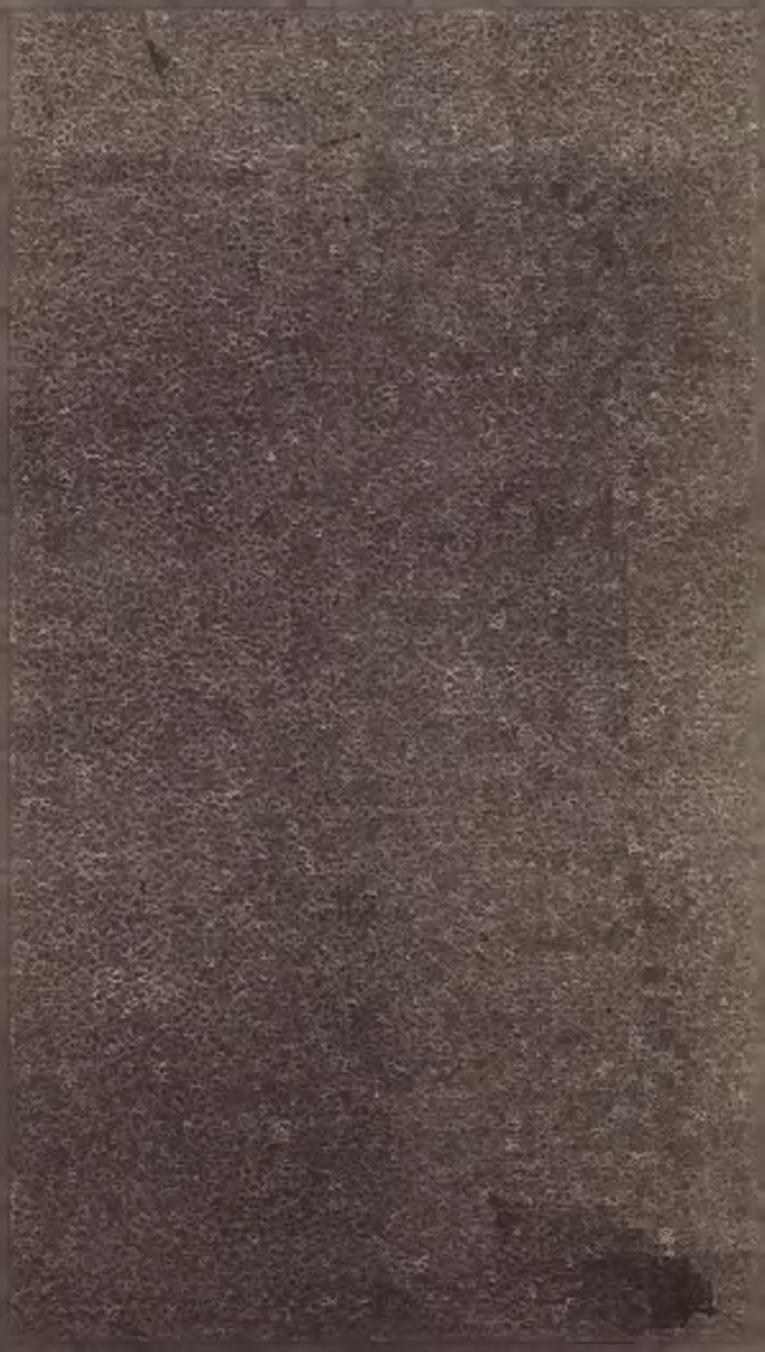




VORLESUNGEN

ÜBER

ASTRONOMIE.

VON

J. J. LITTROW,

DIRECTOR DER STERNWARTE, Ö. UND O. PROFESSOR DER ASTRONOMIE AN DER K. K. UNIVERSITÄT IN WIEN, RITTER DES KAISERLICH-RUSSISCHEN ST. ANNEN-ORDENS DER ZWEYTEN CLASSE, MITGLIED DER K. K. LANDWIRTHSCHAFTS-GESELLSCHAFT IN WIEN, DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT IN LONDON, DER ACADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN IN PRAG, PETERSBURG, KRAKAU, PALERMO, EHREN-MITGLIED DER KAISERLICHEN UNIVERSITÄT IN KASAN, ETC.



ERSTER THEIL.

Mit einer Kupfertafel.

WIEN, 1830.

VERLAG VON J. G. HEUBNER.

GEDRUCKT
BEY ANTON STRAUSS'S SEL. WITWE.

VORREDE.

Obschon meine vor neun Jahren erschienene Astronomie in drey Bänden mit grösserer Güte, als ich für den Erstling meiner öffentlichen Arbeiten erwarten konnte, aufgenommen wurde, so scheint sie mir doch jetzt, als Lehrbuch dieser Wissenschaft, zu umständlich, etwas zu hoch gestellt, und überhaupt für den ersten Selbstunterricht nicht ganz angemessen. Da ich aber noch kein anderes Werk kenne, welches jenes entbehrlich machen könnte, so ist der Zweck des gegenwärtigen nicht, das erste aufzuheben, sondern vielmehr zu dem Gebrauche desselben vorzubereiten, und so jenem durch dieses leichteren Eingang und bessere Aufnahme zu verschaffen. Auch war das frühere Werk für meine eigenen sowohl, als für die Bedürfnisse meiner nächsten Umgebungen in jener Zeit berechnet: allein diese Zeiten haben sich geändert, und mit ihnen auch meine Ansichten, obschon im Allgemeinen derselbe Gang, an welchem ich nur wenig zu verbessern fand, beybehalten wurde. Beynahe jedes Blatt des vorliegenden Buches wird von diesen Änderungen Beweise liefern, und ich überlasse es denen, die beyde mit einander vergleichen

wollen, zu entscheiden, ob diese meine späteren Ansichten auch die besseren sind, und ob ich überhaupt seitdem mit der Zeit fortgegangen bin. Mir ist nur noch übrig zu erwähnen, dass Herr Doctor K. F. Hauber, einer der ausgezeichnetsten meiner früheren Zuhörer, der durch seine Talente und seinen regen Eifer für die Wissenschaft zu den schönsten Hoffnungen berechtiget, durch seine thätige Mitwirkung zur Vollendung des gegenwärtigen Werkes wesentlich mit beygetragen hat.

Wien, den 4. November 1829.

Der Verfasser.

INHALT

DES ERSTEN BANDES.

EINLEITUNG.

ERSTE ABTHEILUNG.

Theoretische Astronomie.

Vorlesung I.

Eintheilung der Oberfläche des Himmels.

Vorlesung II.

Bestimmung der scheinbaren Orte der Gestirne auf der Oberfläche des Himmels.

Vorlesung III.

Sonnenzeit und Sternzeit.

Vorlesung IV.

Auf- und Untergang der Gestirne.

Vorlesung V.

Elliptische Bewegung der Sonne.

Vorlesung VI.

Präcession.

Vorlesung VII.

Nutation.

Vorlesung VIII.

Aberration.

Vorlesung IX.

Parallaxe.

Vorlesung X.

Refraction.

Vorlesung XI.

Heliocentrischer und geocentrischer Ort der Planeten und Kometen.

Vorlesung XII.

Bestimmung der Elemente der Planeten und Cometen aus den Beobachtungen.

Vorlesung XIII.

Verbesserung der schon nahe bekannten Elemente.

ZWEYTE ABTHEILUNG.

Beobachtungen.

Vorlesung I.

Bestimmung der Zeit durch Beobachtungen.

Vorlesung II.

Bestimmung der Polhöhe aus Beobachtungen.

Seite

Vorlesung III.

Bestimmung der Zeit und der Polhöhe zugleich.

Vorlesung IV.

Bestimmung der geographischen Länge.

Vorlesung V.

Bestimmung des Azimuts, der Schiefe der Ecliptik u. s. w.

Vorlesung VI.

Bestimmung der Entfernungen der Himmelskörper von der Erde.

Vorlesung VII.

Finsternisse.

Vorlesung VIII.

Berechnung der Planeten-Beobachtungen.

E i n l e i t u n g.

Da der grösste Theil der in dieser Schrift enthaltenen Betrachtungen auf die sphärische Trigonometrie gegründet ist, so wird es nicht unzweckmässig seyn, die vorzüglichsten Gleichungen derselben mit einigen verwandten Ausdrücken hier kurz zusammen zu stellen. In dem Folgenden bezeichnen A, B, C die Winkel, und α, β, γ die ihnen in derselben Ordnung gegenüberstehenden Seiten eines Dreyeckes.

Sphärische Dreyecke.

1. Gegeben α, β, γ.

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma}},$$

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma}}.$$

$$\text{Cos}\,A = \frac{\text{Cos}\,\alpha - \text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,\gamma}{\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma}.$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,x = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\,\text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\text{Cos}\,A = \text{Cotg}\,\beta\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\gamma+x),$$

$$\text{Cos}\,B = \text{Cotg}\,\alpha\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\gamma-x).$$

2. Gegeben A, B, C.

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{-\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,C}},$$

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,C}}.$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{\text{Cos}\,A + \text{Cos}\,B\,\text{Cos}\,C}{\text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,C}.$$

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,x = \text{tg}\,\tfrac{1}{2}(B+A)\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(B-A)\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,C,$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \text{Cotg}\,B\,\text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}(C-x),$$

$$\text{Cos}\,\beta = \text{Cotg}\,A\,\text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}(C+x).$$

3. Gegeben α, β, C.

$$\operatorname{Cotg} A = \frac{\operatorname{Cotg}\alpha \operatorname{Sin}\beta - \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} C},$$

$$\operatorname{Cotg} B = \frac{\operatorname{Cotg}\beta \operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} C}.$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}C.$$

$$\operatorname{Cos}\gamma = \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos} C + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta;\quad \operatorname{tg} x = \operatorname{Cos} C \operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{Cotg} A = \frac{\operatorname{Cotg} C \operatorname{Sin}(\beta - x)}{\operatorname{Sin} x},\quad \operatorname{Cos}\gamma = \frac{\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}(\beta - x)}{\operatorname{Cos} x},$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}C.$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos} y} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Sin} y},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}C.$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos} z} = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Sin} z},$$ und

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin} B &= \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin} C \\ \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Cos} B &= \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos} C \\ \operatorname{Cos}\gamma &= \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos} C \end{aligned}\right\}.$$

4. Gegeben A, B, γ.

$$\operatorname{Cotg}\alpha = \frac{\operatorname{Cotg} A \operatorname{Sin} B + \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Sin}\gamma},$$

$$\operatorname{Cotg}\beta = \frac{\operatorname{Cotg} B \operatorname{Sin} A + \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Sin}\gamma},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\operatorname{Cos} C = \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}\gamma - \operatorname{Cos} A \operatorname{Cos} B.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{Cotg} A}{\operatorname{Cos}\gamma},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos}(B - x)},\quad \operatorname{Cos} C = \frac{\operatorname{Cos} A \operatorname{Sin}(B - x)}{\operatorname{Sin} x},$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos y} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin y}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin z} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos z}, \text{ und}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin C \sin\beta &= \sin B \sin\gamma \\ \sin C \cos\beta &= \cos A \sin B \cos\gamma + \sin A \cos B \\ \cos C &= \sin A \sin B \cos\gamma - \cos A \cos B \end{aligned}\right\}.$$

5. Gegeben α, β, A.

$$\sin B = \frac{\sin A \sin\beta}{\sin\alpha},\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}(A+B),$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);\ \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{Cotg} A}{\cos\beta},$$

$$\cos(C-x) = \frac{\operatorname{tg}\beta\cos x}{\operatorname{tg}\alpha},\ \operatorname{tg} y = \cos A \operatorname{tg}\beta,$$

$$\cos(\gamma-y) = \frac{\cos\alpha\cos y}{\cos\beta}.$$

6. Gegeben A, B, α.

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha\sin B}{\sin A},\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}(A+B),$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);\ \operatorname{Cotg} x = \cos\alpha\operatorname{tg} B,$$

$$\sin(C-x) = \frac{\cos A \sin x}{\cos B};\ \operatorname{tg} y = \cos B \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\sin(\gamma-y) = \frac{\operatorname{tg} B \sin y}{\operatorname{tg} A}.$$

---

7. Der Fall in 3, wo zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel α, β, C gegeben sind, lässt sich auch durch folgende Gleichungen auflösen:

$$\left.\begin{aligned} \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}\gamma &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}C \\ \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}\gamma &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}C \\ \cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}C \\ \sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}C \end{aligned}\right\}$$

oder endlich durch folgende Reihen, in welchen

$$m = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}\alpha, \text{ und}$$

$$n = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha \text{ ist,}$$

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C + n\,\mathrm{Sin}\,C - \frac{n^2}{2}\,\mathrm{Sin}\,2C + \frac{n^3}{3}\,\mathrm{Sin}\,3C - \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}(A-B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C - m\,\mathrm{Sin}\,C - \frac{m^2}{2}\,\mathrm{Sin}\,2C - \frac{m^3}{3}\,\mathrm{Sin}\,3C - \ldots$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = -90^\circ + \frac{C}{2} - \frac{1}{n}\,\mathrm{Sin}\,C + \frac{1}{2n^2}\,\mathrm{Sin}\,2C - \frac{1}{3n^3}\,\mathrm{Sin}\,3C + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}(A-B) = -90^\circ + \frac{C}{2} + \frac{1}{m}\,\mathrm{Sin}\,C + \frac{1}{2m^2}\,\mathrm{Sin}\,2C + \frac{1}{3m^3}\,\mathrm{Sin}\,3C + \ldots$$

$$\log \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \log \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\beta + n\,\mathrm{Cos}\,C - \frac{n^2}{2}\,\mathrm{Cos}\,2C + \frac{n^3}{3}\,\mathrm{Cos}\,3C - \ldots$$

$$\log \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \log \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\beta - m\,\mathrm{Cos}\,C - \frac{m^2}{2}\,\mathrm{Cos}\,2C - \frac{m^3}{3}\,\mathrm{Cos}\,3C - \ldots$$

oder

$$\log \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \log \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\beta + \frac{1}{n}\,\mathrm{Cos}\,C - \frac{1}{2n^2}\,\mathrm{Cos}\,2C + \frac{1}{3n^3}\,\mathrm{Cos}\,3C - \ldots$$

$$\log \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \log \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\beta - \frac{1}{m}\,\mathrm{Cos}\,C - \frac{1}{2m^2}\,\mathrm{Cos}\,2C - \frac{1}{3m^3}\,\mathrm{Cos}\,3C - \ldots$$

Setzt man in diesen Ausdrücken

statt A, B, C und α, β, γ

die Grössen α, $180-\beta$, γ und A, $180-B$, C,

so erhält man die ähnlichen Ausdrücke für den Fall in 4, wo zwey Winkel A, B mit der eingeschlossenen Seite gegeben sind.

---

8. Hier können noch folgende Veränderungen der sphärischen Dreyecke bemerkt werden.

I. Ist A und γ constant, so hat man

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \mathrm{Cos}\,C,\quad \frac{d\beta}{dB} = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,C},\quad \frac{dC}{dB} = -\mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$\frac{d\alpha}{dB} = \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cotg}\,C,\quad \frac{dC}{d\beta} = -\mathrm{Sin}\,C\,\mathrm{Cotg}\,\alpha$$

$$\frac{d\alpha}{dC} = -\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{Cotg}\,C.$$

II. Ist β und γ constant, so ist

$$\frac{dB}{dC} = \frac{\mathrm{tg}\,B}{\mathrm{tg}\,C},\quad \frac{d\alpha}{dB} = -\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,C,\quad \frac{d\alpha}{dC} = -\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,B,$$

$$\frac{d\alpha}{dA} = \mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Sin}\,B,\quad \frac{dA}{dB} = -\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,C},$$

$$\frac{dA}{dC} = -\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,B}.$$

III. Ist B und C constant, so ist

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{tg\beta}{tg\gamma},\ \frac{dA}{d\beta} = \operatorname{Sin} A\, tg\gamma,\ \frac{dA}{d\gamma} = \operatorname{Sin} A\, tg\beta,$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin} B,\ \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\gamma},\ \frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\gamma}.$$

IV. Ist endlich A und α constant, so ist

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = -\frac{\operatorname{Cos} C}{\operatorname{Cos} B},\ \frac{dC}{dB} = -\frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Cos}\beta},\ \frac{d\gamma}{dC} = tg\gamma \operatorname{Cotg} C,$$

$$\frac{d\beta}{dB} = tg\beta \operatorname{Cotg} B,\ \frac{d\gamma}{dB} = -\frac{tg\beta \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} B},$$

$$\frac{d\beta}{dC} = -\frac{\operatorname{Sin}\beta}{tg B \operatorname{Cos}\gamma}.$$

Sphärische rechtwinkelige Dreyecke.

9. Gegeben A, β, γ wo immer $A = 90°$ ist.

$$tg B = \frac{tg\beta}{\operatorname{Sin}\gamma},\ tg C = \frac{tg\gamma}{\operatorname{Sin}\beta},\ \operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma.$$

10. Gegeben A, α, β.

$$\operatorname{Sin} B = \frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\alpha},\ \operatorname{Cos} C = \frac{tg\beta}{tg\alpha},\ \operatorname{Cos}\gamma = \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Cos}\beta}.$$

11. Gegeben A, B, β.

$$\operatorname{Sin}\alpha = \frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin} B},\ \operatorname{Sin}\gamma = \frac{tg\beta}{tg B},\ \operatorname{Sin} C = \frac{\operatorname{Cos} B}{\operatorname{Cos}\beta}.$$

12. Gegeben A, C, β.

$$tg\alpha = \frac{tg\beta}{\operatorname{Cos} C},\ tg\gamma = \operatorname{Sin}\beta\, tg C,\ \operatorname{Cos} B = \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin} C.$$

13. Gegeben A, B, α.

$$\operatorname{Sin}\beta = \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin} B,\ tg\gamma = tg\alpha \operatorname{Cos} B,\ tg C = \frac{\operatorname{Cotg} B}{\operatorname{Cos}\alpha}.$$

14. Gegeben A, B, C.

$$\operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Cotg} B \operatorname{Cotg} C,\ \operatorname{Cos}\beta = \frac{\operatorname{Cos} B}{\operatorname{Sin} C},\ \operatorname{Cos}\gamma = \frac{\operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} B}.$$

Ebene Dreyecke.

15. Gegeben α, β, γ.

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)}{4\beta\gamma}},$$

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}{4\beta\gamma}}.$$

16. Gegeben A, β, γ.

$$\operatorname{Cotg} B = \frac{\gamma - \beta \operatorname{Cos} A}{\beta \operatorname{Sin} A}, \quad \operatorname{Cotg} C = \frac{\beta - \gamma \operatorname{Cos} A}{\gamma \operatorname{Sin} A},$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \operatorname{Cos} A,$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma} \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2} A, \quad \alpha = \frac{\beta \operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} B} = \frac{\gamma \operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} C}.$$

17. Gegeben A, B, γ.

$$C = 180 - (A + B), \quad \alpha = \gamma \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} C}, \quad \beta = \frac{\gamma \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C};$$

$$\alpha + \beta = \gamma \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} C}, \quad \alpha - \beta = \gamma \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} C}.$$

18. Gegeben α, β, A.

$$\operatorname{Sin} B = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Sin} A, \quad C = 180 - (A + B),$$

$$\gamma = \beta \frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} B} = \alpha \frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} A} = (\alpha + \beta) \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} C}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(A - B)},$$

$$\gamma = \beta \operatorname{Cos} A + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{Sin}^2 A}.$$

19. Gegeben A, B, α.

$$C = 180 - (A + B), \quad \beta = \alpha \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} A},$$

$$\gamma = \alpha \frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} A} = (\alpha + \beta) \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} C}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(A - B)}.$$

---

20. Zum Gebrauche der vorhergehenden Ausdrücke gehören noch folgende einfache Gleichungen:

$\mathrm{Sin}\,(90^\circ \pm A) = \mathrm{Cos}\,A$	$\mathrm{Cos}\,(90 \pm A) = \mp \mathrm{Sin}\,A$
$\mathrm{Sin}\,(180 \pm A) = \mp \mathrm{Sin}\,A$	$\mathrm{Cos}\,(180 \pm A) = -\mathrm{Cos}\,A$
$\mathrm{Sin}\,(270 \pm A) = -\mathrm{Cos}\,A$	$\mathrm{Cos}\,(270 \pm A) = \pm \mathrm{Sin}\,A$
$\mathrm{Sin}\,(360 \pm A) = \pm \mathrm{Sin}\,A$	$\mathrm{Cos}\,(360 \pm A) = \mathrm{Cos}\,A$
$\mathrm{tg}\,(90 \pm A) = \mp \mathrm{Cotg}\,A$	$\mathrm{Cotg}\,(90 \pm A) = \mp \mathrm{tg}\,A$
$\mathrm{tg}\,(180 \pm A) = \pm \mathrm{tg}\,A$	$\mathrm{Cotg}\,(180 \pm A) = \pm \mathrm{Cotg}\,A$
$\mathrm{tg}\,(270 \pm A) = \mp \mathrm{Cotg}\,A$	$\mathrm{Cotg}\,(270 \pm A) = \mp \mathrm{tg}\,A$
$\mathrm{tg}\,(360 \pm A) = \pm \mathrm{tg}\,A$	$\mathrm{Cotg}\,(360 \pm A) = \pm \mathrm{Cotg}\,A$

Goniometrische Formeln.

21. $$\mathrm{Sin}\,\alpha = \sqrt{1 - \mathrm{Cos}^2\alpha} = \frac{1}{\mathrm{Cosec}\,\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}},$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \sqrt{1 - \mathrm{Sin}^2\alpha} = \frac{1}{\mathrm{Sec}\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}},$$

$$\mathrm{Sin\,ver}\,\alpha = 1 - \mathrm{Cos}\,\alpha = 2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{\alpha}{2},$$

$$\mathrm{Cos\,ver}\,\alpha = 1 - \mathrm{Sin}\,\alpha = 2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{90 - \alpha}{2},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{Cotg}\,\alpha} = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{\mathrm{Sin}\,2\alpha}{1 + \mathrm{Cos}\,2\alpha} = \frac{1 - \mathrm{Cos}\,2\alpha}{\mathrm{Sin}\,2\alpha}.$$

22. $$\mathrm{Sin}\,2\alpha = 2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha},$$

$$\mathrm{Cos}\,2\alpha = 1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\alpha = 2\,\mathrm{Cos}^2\alpha - 1 = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha},$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

23. $$\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha}{2}},$$

$$\mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \mathrm{Cos}\,\alpha}{2}},$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha}{1 + \mathrm{Cos}\,\alpha}} = \frac{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha} = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{1 + \mathrm{Cos}\,\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1+\sin\alpha},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}.$$

24. $$\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2},\qquad \frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}(45-\alpha),$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\frac{\operatorname{Cotg}^2\alpha-1}{2},\quad \frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\operatorname{Cotg}(45-\alpha),$$

$$\frac{1\pm\sin 2\alpha}{1\mp\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2(45\pm\alpha)$$

$$1+\sin\alpha=2\sin^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$1-\sin\alpha=2\cos^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right).$$

25. $$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \operatorname{Cotg}\alpha\pm\operatorname{Cotg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{Cotg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\sin\alpha\cos\beta},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},\qquad \frac{\operatorname{Cotg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{Cotg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

26. $$\left.\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\beta+\cos\alpha&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\beta-\cos\alpha&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)&=2\sin\alpha\cos\beta\\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)&=2\cos\alpha\cos\beta\\ \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)&=2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}.$$

27. $\text{Sin}\,\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $\text{Cos}\,\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2}$,

$$e^{\alpha\sqrt{-1}} = \text{Cos}\,\alpha + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,\alpha,$$

$$e^{-\alpha\sqrt{-1}} = \text{Cos}\,\alpha - \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,\alpha,$$

wo log. nat. $e = 1$, also $e = 2.7182818$
und log. brig. $e = 0.4342945$,

$$\text{Sin}\,n\,\alpha = \frac{(\text{Cos}\,\alpha + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,\alpha)^n - (\text{Cos}\,\alpha - \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,\alpha)^n}{2\sqrt{-1}},$$

$$\text{Cos}\,n\,\alpha = \frac{(\text{Cos}\,\alpha + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,\alpha)^n + (\text{Cos}\,\alpha - \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,\alpha)^n}{2},$$

$$\text{Cos}\,n\,\alpha \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,n\,\alpha = (\text{Cos}\,\alpha \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,\alpha)^n,$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,.\,\text{log nat}\,(\text{Cos}\,\alpha + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,\alpha) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\ \text{log nat}\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\,.\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \sqrt{-1}\,.\,\text{tg}\,\alpha}\right),$$

$$\text{Sin}\,(n+2)\,\alpha = 2\,\text{Sin}\,(n+1)\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha - \text{Sin}\,n\,\alpha,$$

$$\text{Cos}\,(n+2)\,\alpha = 2\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,(n+1)\,\alpha - \text{Cos}\,n\,\alpha,$$

28. $\text{Sin}\,\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2..5} - \frac{\alpha^7}{1.2..7} +$,

$$\text{Cos}\,\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1.2..6} +,$$

$$\text{tg}\,\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\,\alpha^5}{3.5} + \frac{17\,\alpha^7}{3^2.5.7} + \frac{62\,\alpha^9}{3^2.5.7.9},$$

$$\text{Cotg}\,\alpha = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{3^2.5} - \frac{2\,\alpha^5}{3.5.7.9} - \frac{\alpha^7}{3.5^2.7.9} -$$

$$\alpha = \text{Sin}\,\alpha + \frac{1}{2.3}\,\text{Sin}^3\,\alpha + \frac{1.3}{2.4.5}\,\text{Sin}^5\,\alpha +$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\,\text{Sin}^7\,\alpha + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}\,\text{Sin}^9\,\alpha +,$$

$$\alpha = 90° - \text{Cos}\,\alpha - \frac{1}{2.3}\,\text{Cos}^3\,\alpha - \frac{1.3}{2.4.5}\,\text{Cos}^5\alpha -$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\,\text{Cos}^7\,\alpha -,$$

$$\alpha = \text{tg}\,\alpha - \tfrac{1}{3}\,\text{tg}^3\,\alpha + \tfrac{1}{5}\,\text{tg}^5\,\alpha - \tfrac{1}{7}\,\text{tg}^7\,\alpha +.$$

29. $\text{Sin}^2\,\alpha = \frac{1}{2}\,(1 - \text{Cos}\,2\,\alpha)$,

$$\text{Sin}^3\,\alpha = \tfrac{1}{4}\,(3\,\text{Sin}\,\alpha - \text{Sin}\,3\,\alpha),$$

$$\text{Sin}^4\,\alpha = \tfrac{1}{8}\,(3 - 4\,\text{Cos}\,2\,\alpha + \text{Cos}\,4\,\alpha),$$

$\mathrm{Sin}^5\,\alpha = \frac{1}{16}(10\,\mathrm{Sin}\,\alpha - 5\,\mathrm{Sin}\,3\,\alpha + \mathrm{Sin}\,5\,\alpha)$,
$\mathrm{Sin}^6\,\alpha = \frac{1}{32}(10 - 15\,\mathrm{Cos}\,2\,\alpha + 6\,\mathrm{Cos}\,4\,\alpha - \mathrm{Cos}\,6\,\alpha)$,
$\mathrm{Sin}^7\,\alpha = \frac{1}{64}(35\,\mathrm{Sin}\,\alpha - 21\,\mathrm{Sin}\,3\,\alpha + 7\,\mathrm{Sin}\,5\,\alpha - \mathrm{Sin}\,7\,\alpha)$,
$\mathrm{Sin}^8\,\alpha = \frac{1}{128}(35 - 56\,\mathrm{Cos}\,2\,\alpha + 28\,\mathrm{Cos}\,4\,\alpha - 8\,\mathrm{Cos}\,6\,\alpha + \mathrm{Cos}\,8\,\alpha)$,
$\mathrm{Cos}^2\,\alpha = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{Cos}\,2\,\alpha)$,
$\mathrm{Cos}^3\,\alpha = \frac{1}{4}(3\,\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Cos}\,3\,\alpha)$,
$\mathrm{Cos}^4\,\alpha = \frac{1}{8}(3 + 4\,\mathrm{Cos}\,2\,\alpha + \mathrm{Cos}\,4\,\alpha)$,
$\mathrm{Cos}^5\,\alpha = \frac{1}{16}(10\,\mathrm{Cos}\,\alpha + 5\,\mathrm{Cos}\,3\,\alpha + \mathrm{Cos}\,5\,\alpha)$,
$\mathrm{Cos}^6\,\alpha = \frac{1}{32}(10 + 15\,\mathrm{Cos}\,2\,\alpha + 6\,\mathrm{Cos}\,4\,\alpha + \mathrm{Cos}\,6\,\alpha)$,
$\mathrm{Cos}^7\,\alpha = \frac{1}{64}(35\,\mathrm{Cos}\,\alpha + 21\,\mathrm{Cos}\,3\,\alpha + 7\,\mathrm{Cos}\,5\,\alpha + \mathrm{Cos}\,7\,\alpha)$,
$\mathrm{Cos}^8\,\alpha = \frac{1}{128}(35 + 56\,\mathrm{Cos}\,2\,\alpha + 28\,\mathrm{Cos}\,4\,\alpha + 8\,\mathrm{Cos}\,6\,\alpha + \mathrm{Cos}\,8\,\alpha)$.

Ist n eine ganze Zahl, so hat man

$$\pm 2^{n-1}\,\mathrm{Sin}^n\,\alpha = \mathrm{Sin}\,n\,\alpha - n\,\mathrm{Sin}\,(n-2)\,\alpha + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}\,\mathrm{Sin}\,(n-4)\,\alpha - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\mathrm{Sin}\,(n-6)\,\alpha +,$$

wenn n ungerade ist,

$$\pm 2^{n-1}\,\mathrm{Sin}^n\,\alpha = \mathrm{Cos}\,n\,\alpha - n\,\mathrm{Cos}\,(n-2)\,\alpha + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}\,\mathrm{Cos}\,(n-4)\,\alpha - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\mathrm{Cos}\,(n-6)\,\alpha +,$$

wenn n gerade ist, und überhaupt

$$2^{n-1}\,\mathrm{Cos}^n\,\alpha = \mathrm{Cos}\,n\,\alpha + n\,\mathrm{Cos}\,(n-2)\,\alpha + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}\,\mathrm{Cos}\,(n-4)\,\alpha + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\mathrm{Cos}\,(n-6)\,\alpha +,$$

wo alle drey Reihen so lange fortgesetzt werden, bis man auf einen negativen Bogen kommt, und wo in den beyden letzten Reihen, für ein gerades n, nur die Hälfte des Coefficienten von Cos 0° genommen wird.

30. Um einen in Secunden ausgedrückten Bogen in Theilen des Halbmessers auszudrücken, multiplicirt man den Bogen durch Sin 1″, wo man hat

$$\mathrm{Sin}\,1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60^2} = 0.00000\;48481\;36809,$$

$\log \mathrm{Sin}\,1'' = 4.68557\;48668$ und $\mathrm{Sin}\,\alpha = \alpha\,\mathrm{Sin}\,1''$, wenn α sehr klein ist

$$\pi = 3.14159\;26536,\quad \frac{1}{\pi} = 0.31830\;98862,$$
$$\log \pi = 0.49714\;98727.$$

ERSTE ABTHEILUNG.

Theoretische Astronomie.



Vorlesung. I.

Eintheilung der Oberfläche des Himmels.

1. §. Der Himmel erscheint uns als eine hohle Kugelfläche, auf welcher wir die Gegenstände, die er uns darbiethet, zu betrachten glauben. Die Richtung der Schwere auf unserer Erde in dem Orte des Beobachters trifft, verlängert, jene Kugelfläche in zwey Puncten, deren oberer, uns sichtbarer, das Zenith, und deren unterer, uns unsichtbarer, das Nadir des Beobachters heisst. Die Kreise, durch deren Mittelpuncte jene Richtung unter rechten Winkeln geht, sind Almicantarat, und unter diesen der, welcher durch den Beobachter geht, der scheinbare, und der, welcher durch den Mittelpunct der Erde geht, der wahre Horizont.

2. §. Die tägliche Bewegung der Himmelskörper geht in unter einander parallelen Kreisen vor sich, deren sämmtliche Mittelpuncte in einer geraden Linie, der Weltaxe, liegen. Die zwey Puncte, in welchen diese Axe die Fläche des Himmels trifft, sind die Weltpole, und zwar der in unseren Gegenden sichtbare, der nördliche, und der entgegengesetzte, uns unsichtbare, der südliche Pol. Unter diesen Parallelkreisen ist der von den beyden Polen gleich weit abstehende der Äquator, der den Himmel in 2 gleiche Theile, die nördliche und die südliche Hemisphäre, theilt.

Der Durchschnitt des Äquators mit dem wahren Horizonte, auf der Seite, wo die Gestirne in ihrer täglichen Bewegung sich über den Horizont erheben, heisst Ost oder Morgen, und der diesem entgegengesetzte Durchschnitt beyder Kreise West oder Abend. Auf- oder Untergang bezeichnet den Augenblick, in welchem ein Gestirn auf der Ost- oder Westseite durch den Horizont geht, und die Entfernung des auf- oder untergehenden Gestirns vom Ost- oder Westpuncte, im Horizonte gezählt, heisst des Gestirns Morgen- oder Abendweite.

3. §. Der grösste Kreis durch die Weltpole und durch das Zenith oder Nadir eines Beobachtungsortes ist der Meridian dieses Ortes. Der Augenblick des Durchganges eines Gestirns durch den Meridian ist die Culmination des Gestirns. Der Durchschnitt der Ebene des Meridians mit dem wahren Horizonte ist die Mittagslinie. Ihr Endpunct in der südlichen Hemisphäre heisst Süd oder Mittag, und der entgegengesetzte Nord oder Mitternacht.

Grösste Kreise durch die Weltpole und ein Gestirn sind dieses Gestirns Declinations- oder Abweichungs-, oder auch Stundenkreise. Grösste Kreise durch das Zenith und ein Gestirn sind dieses Gestirns Höhen- oder Scheitelkreise. Die ersteren stehen also auf dem Äquator, die anderen auf dem Horizont senkrecht. Der Winkel am Weltpole zwischen dem Meridian und dem Declinationskreise eines Gestirns ist dieses Gestirns Stundenwinkel, und der Winkel am Zenith zwischen dem Meridian und dem Scheitelkreise eines Gestirns ist dieses Gestirns Azimut. Beyde, Stundenwinkel und Azimut, werden in der Richtung der täglichen Bewegung des Himmels, von Süd nach West, bis 360 Grade gezählt.

Der Theil des Declinationskreises, der zwischen dem Gestirn und dem Äquator enthalten ist, heisst des Gestirns Declination oder Abweichung, und der Theil des Declinationskreises, welcher zwischen dem Gestirn und dem Nordpole enthalten ist, die Poldistanz des Gestirns. Der Theil des Scheitelkreises zwischen dem Gestirn und dem Horizonte ist die Höhe, und zwischen dem Gestirn und dem Zenith die Zenithdistanz des Gestirns. Steht das Gestirn unter dem Äquator, so ist seine Declination südlich oder negativ, und steht es unter dem Horizonte, so ist seine Höhe negativ.

4. §. Unter den Körpern des Himmels dringt sich dem Beobachter vor allen die Sonne auf. Man bemerkte sehr früh, dass sie nebst der täglichen Bewegung von Ost nach West, die sie mit allen übrigen Gestirnen gemein hat, noch in einer eigenen Bewegung von West nach Ost in einem Kreise fortzurücken scheint, welcher den Äquator in zwey einander gegenüberstehenden Puncten schneidet. Dieser

grösste Kreis, die scheinbare Bahn der Sonne, heisst die Ecliptik. Ihre Axe, d. h. die durch den Mittelpunct dieses Kreises auf seine Ebene senkrechte Linie bezeichnet in der nördlichen Hemisphäre des Himmels den Nordpol und in der südlichen den Südpol der Ecliptik. Ein grösster Kreis durch diese Pole und ein Gestirn ist des Gestirns Breitenkreis, und der Theil desselben zwischen dem Gestirn und der Ecliptik heisst die Breite, so wie der zwischen dem Gestirn und dem Nordpol der Ecliptik die Ecliptik-Poldistanz des Gestirns. Die Durchschnittspuncte der Ecliptik mit dem Äquator sind die Äquinoctialpuncte oder die Puncte der Nachtgleichen, deren jener, von welchem die Sonne sich in die nördliche Hemisphäre erhebt, der Frühlingspunct, und der entgegengesetzte der Herbstpunct heisst. Der Bogen des Äquators zwischen dem Frühlingspuncte und dem Declinationskreise eines Gestirns ist des Gestirns Rectascension; und der Bogen der Ecliptik zwischen dem Frühlingspuncte und dem Breitenkreise eines Gestirns ist des Gestirns Länge. Rectascension und Länge wird in einer der täglichen Bewegung des Himmels entgegengesetzten Richtung, also von Süd nach Ost bis 360 Grade gezählt. Ist das Gestirn unter der Ecliptik oder auf der Seite des Südpols der Ecliptik, so ist die Breite desselben südlich oder negativ.

Der Parallelkreis durch den Nord- und Südpol der Ecliptik ist der nördliche und südliche Polarkreis. Der Parallelkreis, der in der nördlichen und südlichen Hemisphäre eben so weit von dem Äquator absteht, als die Polarkreise von den Weltpolen des Äquators, heisst der nördliche und südliche Wendekreis. Der Declinationskreis durch die Äquinoctialpuncte ist der Colur der Nachtgleichen, und der von diesen um 90 Grade in Länge oder Rectascension entfernte Declinationskreis ist der Colur der Solstitien oder der Sonnenwenden.

5. §. Es wird jetzt nicht nothwendig seyn, hier alle Beweise umständlich anzuführen, welche man für die Kugelgestalt der Erde gegeben hat. Sie folgen aus der allmähligen Verschwindung der unteren Theile hoher Gegenstände, von denen man sich entfernt; aus den Erscheinungen, welche

uns die Gestirne darbiethen, wenn wir unsern Standpunct auf der Oberfläche der Erde gen Süd oder Nord verändern; aus unsern sogenannten Reisen um die Welt; aus dem Schatten der Erde bey den Mondesfinsternissen; aus unmittelbaren Messungen ihrer Oberfläche, und endlich aus der Analogie mit andern ihr ähnlichen Himmelskörpern. (Pop. Astr. I. p. 5.)

Diese kugelförmige Erde scheint uns, wegen der Unermesslichkeit des sie umgebenden Himmels, in dem Mittelpuncte desselben befestiget zu seyn, und mit dem Himmel selbst eine concentrische Kugel zu bilden, daher auch die meisten der oben erklärten Kreise des Himmels dort, wo ihre Ebenen die Oberfläche der Erde schneiden, ähnliche Kreise erzeugen, die mit denselben Nahmen des Horizonts, Äquators, Meridians u. f. bezeichnet, und zum Unterschiede mit jenen, die irdischen genannt werden.

6. §. Eben so wenig werden wir uns bey der Untersuchung aufhalten, ob die tägliche Bewegung des Himmels von Ost gen West um die ruhende Erde eine wahre Bewegung desselben oder nur ein Schein ist, der durch die tägliche Rotation der Erde von West gen Ost um ihre Axe entsteht, welche von der oben erwähnten Weltaxe gleichsam nur ein Theil ist. In den blossen äussern Erscheinungen dieser Bewegung liegt nichts, was uns zu der Annahme der einen oder der andern dieser beyden Hypothesen vorzugsweise bestimmen könnte; vielmehr hängt diese Wahl, so lange wir bloss bey den äussern Erscheinungen stehen bleiben, allein von unserer Willkür ab, wie wir denn auch in dem Folgenden, wenn auch nur der einfachern Darstellung und des bisher üblichen Sprachgebrauches wegen, die Ausdrücke brauchen werden, welche sich auf die Bewegung des Himmels um die in dem Mittelpuncte desselben ruhende Erde beziehen. Es ist aber bereits allgemein angenommen, und es darf nicht weiter verkannt werden, dass die bloss scheinbare Bewegung des Himmels von Ost nach West, von der wahren täglichen Rotation der Erde in einer entgegengesetzten Richtung von West nach Ost hervorgebracht wird. Die Beweise dafür folgen bekanntlich aus der äussersten Unwahrscheinlichkeit, dass so viele, so grosse, und so sehr unter einander und von uns entfernte Himmelskörper sich mit jener allen gemeinschaftli-

chen Regelmässigkeit um diesen, in Beziehung auf sie, ganz unbedeutenden Punct der Erde bewegen sollen; aus der durch die Schwungkraft der Rotation entstehenden Abplattung der Erde an ihren beyden Polen; aus der Verschiedenheit der Pendellänge in verschiedenen Entfernungen von dem irdischen Äquator; aus unmittelbaren Fallversuchen von hohen Thürmen, und endlich aus der Beobachtung mehrerer, uns in mehr als einer Beziehung verwandten Gestirne, die durch die uns sichtbare Bewegung der Flecken auf ihrer Oberfläche eine ähnliche Rotation um ihre Axe verrathen. Die Einwendungen, welche man gegen diese Bewegung der Erde um ihre Axe in früheren Zeiten gemacht hat, verdienen jetzt weder eine Widerlegung, noch selbst eine Erwähnung. (Pop. Astr. I. p. 103.)

§. 7. Ganz eben so werden wir endlich auch mit der dritten der oben erwähnten Erscheinungen, mit der jährlichen Bewegung der Sonne von West nach Ost in einem Kreise verfahren, in dessen Mittelpunct die Erde ruhen soll. Diese Erscheinung wird offenbar dieselbe seyn, wenn auch die Sonne ruhen, und dafür die Erde in der Peripherie jenes Kreises, der Ecliptik, jährlich einmahl von West nach Ost um die in dem Mittelpuncte dieses Kreises stehende Sonne sich bewegen sollte. Die beynahe ungeheure Grösse der Sonne gegen die Erde macht die letzte Voraussetzung sehr wahrscheinlich, und die durch diese Annahme erhaltene Vereinfachung aller übrigen, sonst so verwickelten Phänomene unseres Sonnensystems, so wie die Analogie mit mehreren andern uns nahen Himmelskörpern, die sich ebenfalls um die Sonne bewegen, und endlich die bald zu erklärenden Erscheinungen der Aberration des Lichtes lassen über die Richtigkeit dieser Voraussetzung keinen Zweifel mehr übrig. (P. Astr. I. 122.) Da überhaupt die Überzeugung von der täglichen Bewegung der Erde um ihre Axe, und von der jährlichen Bewegung derselben um die Sonne schon längst ohne Widerstand, selbst ausser dem Gebiethe der Wissenschaft, sich Bahn gemacht hat, so scheint es dem gegenwärtigen Zustande unserer Kenntnisse nicht mehr angemessen, sich den Irrthümern verflossener Jahrhunderte hinzugeben, und von einer bereits lange als irrig erkannten Meinung sich nur allmählig zu einer bereits allgemein angenommenen Wahrheit zu erheben; ein

Verfahren, welches wohl in die Geschichte, aber nicht in das System der Wissenschaft gehört.

8. §. Ehe wir aber die mannigfaltigen Verbindungen, welche die Gestirne mit den verschiedenen oben erwähnten Kreisen eingehen, näher betrachten, wollen wir die vorzüglichsten derselben, zur leichtern Übersicht, sinnlich darzustellen suchen.

Sey also (fig. 1.) Z der obere Pol des Horizonts HAR oder das Zenith; N der obere Pol des Äquators AOQ oder der Weltpol; L der obere Pol der Ecliptik POE; ferner R, A und H Süd, West und Nord, und HZR der Meridian des Ortes der Erde, dessen Zenith in Z ist. Zieht man durch einen Stern S die grössten Kreise ZSa, NSb, LSc nach der Ordnung durch die Pole Z, N und L, also in derselben Ordnung senkrecht auf HR, AQ und EP, so ist

Sa die Höhe des Gestirns,
SZ die Zenithdistanz,
Sb die Declination,
SN die Poldistanz in Beziehung auf den Äquator,
Sc die Breite,
SL die Poldistanz in Beziehung auf die Ecliptik,
ONb oder Ob die Rectascension od. gerade Aufsteigung,
OLc oder Oc die Länge,
RZa oder Ra das Azimut und
ENB oder Qb der Stundenwinkel des Sterns.

Endlich ist O der Frühlings-Nachtgleichenpunct; der Kreis durch N und O der Colur der Nachtgleichen; HN die Höhe des Weltpoles über dem Horizonte oder die Polhöhe des Ortes der Erde, dessen Zenith in Z ist, und der Winkel QOE, unter welchem die Ebene der Ecliptik und des Äquators gegen einander geneigt sind, die Schiefe der Ecliptik.

Zur grösseren Bequemlichkeit wollen wir von den vorhergehenden Grössen noch folgende Bezeichnungen einführen, die wir auch im Folgenden, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, beybehalten.

Rectascension $Ob = a$

Poldistanz in Beziehung auf den Äquator $SN = p$,

Declination $Sb = 90 - p = \delta$,

Länge O c $= \lambda$,
Poldistanz in Beziehung auf die Ecliptik S L $= \pi$,
Breite S c $= 90 - \pi = \beta$,
Stundenwinkel Q b $= s$,
Zenithdistanz S Z $= z$,
Azimut R a $= \omega$,
Polhöhe H N $= \varphi$ und deren Complement, die Äquatorhöhe N Z $=$ Q R $= \psi$,
Schiefe der Ecliptik E O Q $= e$.

9. §. Oft ist es vortheilhafter, statt der dureh diese verschiedenen grössten Kreise unmittelbar gebildeten Dreyecke, diejenigen zu betrachten, welche von den Polen dieser Kreise gebildet werden.

Bezeichnet man die grössten Kreise A ♈ Q, ♈ C B und F D N (fig. 2) in derselben Ordnung durch (I), (II) und (III), und sind P, L und G die Pole derselben, so wird man zuerst bestimmen, wie das Polardreyeck P L G von dem gegebenen Dreyecke ♈ D C abhängt.

Da P, L, G die Pole der drey erwähnten Kreise sind, so steht P R auf A Q senkrecht, und die Winkel von P R, A Q und ♈ B mit A P Q, so wie die Bogen ♈ P = ♈ B = ♈ Q, sind gleich 90 Graden. Eben so steht

die Fortsetzung von L P senkrecht auf (I) und (II)
G P - - - (I) und (III)
G L - - - (II) und (III).

Aus derselben Ursache sind in den folgenden Dreyecken die genannten Winkel und die ihnen gegenüberstehenden Seiten gleich 90 Graden, nämlich:

in dem Dreyecke ♈ L P die Winkel L und P
D G P - - - G und P
C G L - - - G und L.

Eben so sind endlich folgende Bogen gleich 90 Graden, nämlich der Bogen

♈ D fortgesetzt bis zu dem Durchschnitte der L P mit (I)
♈ B - - - - - - - - L P mit (II)
C B - - - - - - - - GL mit (II)
CN - - - - - - - - GL mit (III)
DQ - - - - - - - - GP mit (I)
DN - - - - - - - - GP mit (III)

I. Nennt man daher in dem Dreyecke ΥCD die Winkel

$$D\Upsilon C = A,\ \Upsilon CD = B,\ \Upsilon DC = C$$

und die ihnen entgegenstehenden Seiten

$$CD = \alpha,\ \Upsilon D = \beta,\ \Upsilon C = \gamma;$$

so folgt sofort aus dem Vorhergehenden, dass in dem Polardreyecke GLP die Winkel

$$LGP = \alpha,\ LPG = \beta,\ GLP = 180 - \gamma,$$

und die ihnen gegenüberstehenden Seiten

$$LP = A,\ GL = B,\ GP = 180 - C \text{ sind.}$$

Man nennt aber

A die Neigung der Ebenen (I) . (II),
B - - - - (II).(III),
180 — C - - - - (I) .(III),

und eben so

α die Distanz des Knotens der Ebenen (II).(III) von dem Knoten der Ebenen (I).(III),
β die Distanz des Knotens der Ebenen (I) . (II) von dem Knoten der Ebenen (I).(III),
γ die Distanz des Knotens der Ebenen (I) . (II) von dem Knoten der Ebenen (II).(III),

und die Auflösung des Dreyecks ΥCD oder GLP zeigt, wie diese Grössen A, B, C und α, β, γ von einander abhängen.

II. Nennt man überdiess

(1) die Ebene des grössten Kreises $A \Upsilon Q$ = (I),
(2) - - - - - $P \Upsilon R$,
(3) - - - - - PQR,

und bezeichnet man durch

A′ die Neigung der Ebene III gegen (3),
B′ - - - - III - (2),
C′ - - - - III - (1),

und durch

α' die Distanz des Knotens der Ebenen (III).(II) von dem Knoten der Ebenen (III).(3),
β' die Distanz des Knotens der Ebenen (III).(II) von dem Knoten der Ebenen (III).(2),
γ' die Distanz des Knotens der Ebenen (III). (II) von dem Knoten der Ebenen (III).(1),

so ist $CNB = A'$ und $\alpha C = \alpha'$,

$$REC = B' \text{ und } EC = \beta',$$
$$NDQ = C' \text{ und } CD = \gamma'.$$

Kennt man daher z. B. die Grössen A, B, γ, also auch, nach I, die Grössen α, β, C, so wird man auch die Grössen

A', α' durch die Auflösung des Dreyecks BNC,
B', β' - - - - - ♈CE,
C', γ' - - - - - ♈CD

bestimmen, und dadurch die Abhängigkeit der Grössen A, B', C' und α', β', γ' von den in I. betrachteten Grössen A, B, C und α, β, γ angeben können. Wir werden auf diese Betrachtung in der Folge wieder zurückkommen.

Vorlesung II.

Bestimmung der scheinbaren Orte der Gestirne auf der Oberfläche des Himmels.

1. §. Da alle bisher betrachteten Kreise des Himmels, Almicantarat und Parallelkreise ausgenommen, sogenannte grösste Kreise, d. h. solche sind, deren Mittelpunct zugleich jener der Kugelfläche des Himmels oder der Erde, also auch, wegen der Kleinheit der Erde gegen die Ausdehnung des Weltraumes, das Auge des Beobachters ist, so bilden diese Kreise unter einander sphärische Dreyecke. Die Verbindungen dieser Dreyecke geben zu verschiedenen Problemen Veranlassung, von denen wir hier die vorzüglichsten näher betrachten wollen.

2. §. Stellen wir uns ein Instrument vor, welches aus zwey eingetheilten Kreisen, einem vertikalen und einem horizontalen besteht. Wir werden unten dieses und ähnliche Instrumente und den Gebrauch derselben näher kennen lernen. Bringt man die Ebene des vertikalen Kreises in die Gesichtslinie des Gestirns, und kennt man auf dem horizontalen Kreise den Punct desselben, welcher dem Meridian des Beobachters entspricht, so wird man mit diesem Instrumente die Zenithdistanz Z und das Azimut ω des Gestirns beobachten können. Bringt man aber den vertikalen Kreis selbst in die Ebene des Meridians, so wird man dadurch die Zeit des Durchganges der Gestirne durch den Meridian, oder die Zeit ihrer Culmination beobachten, und diese Zeiten mit denen einer Uhr vergleichen können.

3. §. Ist dieses Gestirn die Sonne, so wird man dadurch jeden Tag die Uhrzeit des Mittags haben, und so den Stand und Gang der Uhr für alle Mittage, also auch, wenn die Uhr gleichförmig geht, für jeden zwischen diesen Mittagen liegenden Augenblick erhalten, oder man wird, da dadurch die

Abweichung der Uhr von der Sonnenzeit bekannt ist, diese wahre Sonnenzeit durch die Uhr selbst, wenn man ihre Correction berücksichtiget, erhalten. Um dieses sogleich durch ein Beyspiel deutlich zu machen, nehmen wir an, dass man durch die erwähnten Beobachtungen erhalten habe:

Uhrzeit der Culmination der Sonne.

Tag I	- - -	$0^h\ 3'\ 15''$,
II	- - -	0 3 27,
III	- - -	0 3 39,
IV	- - -	0 3 51,

und dass man an dem zweyten Tage Abends um $4^h\ 21'\ 37''$ Uhrzeit eine andere Beobachtung gemacht habe, deren wahre Sonnenzeit man sucht. Die Uhr gab an dem Mittage des zweyten Tages $3'\ 27''$ zu viel, oder ihre Correction gegen wahre Zeit war in diesem Augenblicke gleich $-3'\ 27''$. Da ferner die Uhr in jedem Sonnentage, d. h. in der Uhrzeit von $24^h\ 0'\ 12''$ um $12''$ accelerirt, und da die zweyte Beobachtung um $4^h\ 18'\ 10''$ Uhrzeit nach dem zweyten Mittage angestellt wurde, so hat man

$$24^h\ 0'\ 12'' : 12'' = 4^h\ 18'\ 10'' : x'' \text{ oder}$$
$$24^h : 12'' = 4^h\ 18'\ 10'' - x'' : x''$$
$$\text{oder } x = 2''\ 15.$$

Die Acceleration der Uhr zur Zeit der zweyten Beobachtung war also $3'\ 27'' + 2''.15 = 3'\ 29''\ 15$, und man hat daher

Uhrzeit der Beobachtung	$4^h\ 21'\ 37''$
Correction der Uhr	$-\ 3\ 29\ .\ 15$
Wahre Sonnenzeit der Beobachtung	$4^h\ 18'\ 7''.85$

Man sieht, dass diese wahre Sonnenzeit der Beobachtung nichts anderes, als der Stundenwinkel der Sonne in dem Augenblicke der Beobachtung ist.

4. §. Will man aber die Uhr nicht nach der Sonne, sondern, was in der That bequemer ist, nach den Fixsternen reguliren, so wird man, da die Zeit zwischen zwey nächsten Culminationen eines Sterns um nahe $3'\ 56''$ kürzer ist, als die Zeit zwischan zwey nächsten Culminationen der Sonne, welche letzte in dieser Zeit durch ihre eigene Bewegung um nahe einen Grad gegen Osten vorrückt, und daher später in den Meridian tritt — so wird man das Pendel der

Uhr so lange verkürzen, bis die Uhr zwischen zwey nächsten Culminationen desselben Fixsterns nahe 24 Stunden zeigt. Stellt man dann die Zeiger der Uhr so, dass sie nahe $0^h\,0'\,0''$ geben, wenn der Frühlingspunct durch den Meridian geht, so wird diese Uhr nach Sternzeit gehen, und man wird, wie vorhin, die Correction derselben gegen Sternzeit für jeden Augenblick finden, wenn man aus den Beobachtungen die Uhrzeiten kennt, zu welchen jeden Tag die Culmination des Frühlingspunctes Statt hatte. Man bemerkt auch hier, dass unter dem Worte „Sternzeit einer Beobachtung" der Stundenwinkel des Frühlingspunctes in dem Augenblicke dieser Beobachtung verstanden wird. Wir werden unten sehen, wie man diese beyden Zeitmasse, Sonnenzeit und Sternzeit, mit der grössten Genauigkeit bestimmen, und wie man durch eine einfache Rechnung jede dieser Zeiten in die andere verwandeln kann. Hier ist es genug, die Möglichkeit dieser Bestimmung gezeigt, und die Art, wie sie vorgenommen wird, im Allgemeinen angedeutet zu haben.

5. §. Probl. Die Polhöhe φ eines Ortes, die Zenithdistanz z und das Azimut ω eines Gestirns für eine gegebene Zeit ist aus einer Beobachtung bekannt: man suche den Stundenwinkel s und die Poldistanz p und die Rectascension a des Gestirns für dieselbe Zeit.

Ist S (fig. 1) das Gestirn, so hat man in dem sphärischen Dreyecke N Z S.

$$NZ = 90 - \varphi = \psi,\ ZS = z,\ NS = p \text{ und}$$
$$ZNS = s,\ NZS = 180 - \omega.$$

Man findet daher nach den bekannten Vorschriften der sphärischen Trigonometrie die beyden Grössen s und p durch folgende Gleichungen. (Einl. §. 3.)

$$\text{Sin } s \text{ Sin } p = \text{Sin } \omega \text{ Sin } z,$$
$$\text{Cos } s \text{ Sin } p = \text{Cos } \omega \text{ Sin } z \text{ Sin } \varphi + \text{Cos } z \text{ Cos } \varphi,$$
$$\text{Cos } p = - \text{Cos } \omega \text{ Sin } z \text{ Cos } \varphi + \text{Cos } z \text{ Sin } \varphi.$$

Die Division der beyden ersten Gleichungen gibt den gesuchten Werth von s aus tang s, und die dritte Gleichung gibt p. Überdiess kann jede der beyden ersten Gleichungen zur Prüfung der Rechnung und zugleich zur Entscheidung dienen, in welchem der vier Quadranten der Peripherie des Äquators die Grösse s genommen werden soll.

Noch haben wir keine Rücksicht auf die absolute Zeit der Beobachtung genommen, die uns, wie wir sogleich sehen werden, zur Bestimmung der dritten unbekannten Grösse a dienen wird.

Ist nämlich $t = EO = ENO$ die bekannte Sternzeit der Beobachtung, so hat man, wie man leicht sieht,

$$t = a + s,$$

und da s bereits aus dem Vorhergehenden bekannt ist, so findet man die Rectascension a des Sterns durch die Gleichung

$$a = t - s.$$

Weniger einfach wird dieser letzte Theil der Auflösung, wenn, statt der Sternzeit t, die Sonnenzeit T der Beobachtung gegeben wäre. Nennt man nämlich, analog mit dem Vorhergehenden, S den Stundenwinkel und A die Rectascension der Sonne, so ist, da die Gleichung $t = a + s$ für alle Gestirne gilt, auch für die Sonne.

$$t = A + S,$$

also auch, wenn man beyde Werthe von t einander gleich setzt,

$$a + s = A + S.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, der Stundenwinkel S der Sonne mit der Sonnenzeit T der Beobachtung gleichbedeutend ist, so findet man die Rectascension des Gestirns aus folgender Gleichung

$$a = A + T - s.$$

Man sieht daraus, dass man, wenn, statt der Sternzeit, die Sonnenzeit der Beobachtung gegeben ist, auch noch die Rectascension A der Sonne für dieselbe Zeit kennen muss, um die Rectascension a des beobachteten Sterns zu finden. Wie man aber die Grösse A für jeden gegebenen Augenblick finden kann, werden wir weiter unten sehen.

I. Bey allen Aufgaben der praktischen Astronomie ist es aber nicht genug, die Aufgabe selbst nur überhaupt aufgelöst zu haben, sondern man muss auch zugleich die Verhältnisse angeben, unter welchen diese Auflösung für die Anwendung günstig oder nachtheilig ist. Da nämlich in unserem Falle die gegebene Grösse φ, z und ω des Problemes aus B e o b a c h t u n g e n abgeleitet sind, und Beobachtungen, wie alle Menschenwerke, auch wenn sie mit den vollkom-

mensten Instrumenten und mit der grössten Vorsicht angestellt werden, doch immer noch, wenigstens kleinen Fehlern, unterworfen sind, so müssen alle die Fälle sorgfältig vermieden werden, in welchen diese Fehler einen vorzüglich schädlichen Einfluss auf die gesuchten Grössen haben.

Um daher zu finden, welchen Einfluss die Fehler $d\varphi$, dz, $d\omega$ der als bekannt vorausgesetzten Grössen φ, z, ω auf die gesuchte Grösse s und p haben, wird man die vorhergehenden Gleichungen in Beziehung auf diese Grösse differentiiren, wodurch man erhält (Einl. §. 8)

$$dp = dz \operatorname{Cos} \nu - d\omega \operatorname{Sin} \nu \operatorname{Sin} z - d\varphi \operatorname{Cos} s,$$

$$ds \operatorname{Sin} p = dz \operatorname{Sin} \nu + d\omega \operatorname{Cos} \nu \operatorname{Sin} z + d\varphi \operatorname{Sin} s \operatorname{Cos} p,$$

wo ν der Winkel ZSN des Vertikalkreises mit dem Declinationskreise ist.

Man findet diesen Winkel ν durch folgende Ausdrücke

$$\operatorname{Sin} \nu = \frac{\operatorname{Sin} s \operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin} z} = \frac{\operatorname{Sin} \omega \operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin} p}$$

$$\operatorname{Cos} \nu = \frac{\operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} z}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} z}$$

oder auch durch

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{Cos} s \operatorname{Cotg} \varphi \qquad \operatorname{tg} \nu = \frac{\operatorname{Sin} m \operatorname{tg} s}{\operatorname{Sin} (p - m)}$$

$$\operatorname{tg} n = \operatorname{Cos} \omega \operatorname{Cotg} \varphi \qquad \operatorname{tg} \nu = \frac{\operatorname{Sin} n \operatorname{tg} \omega}{\operatorname{Sin} (z + n)}$$

Diese Grösse ν ist für Sterne, die auf der Südseite des Zeniths culminiren, immer kleiner als 90°, und im dritten und vierten Quadranten von s ist für sie ν negativ. Für die auf der Nordseite des Zeniths culminirende, oder für die Circumpolarsterne aber ist ν ebenfalls im dritten und vierten Quadranten von s negativ, und überdiess im ersten und vierten Quadranten zwischen 90° und 180°, so wie im zweyten und dritten Quadranten von s zwischen 0° und 90°. Man sieht aus diesen Gleichungen z. B. dass, wenn das Gestirn nahe am Meridian, also s nahe an 0 oder 180° ist, ein Fehler $d\varphi$ der Polhöhe den grössten Einfluss auf p und den kleinsten auf s hat; dass s überhaupt desto schwerer mit Genauigkeit zu bestimmen seyn wird, je kleiner die Poldistanz p ist u. s. w.

II. Wollte man, umgekehrt, aus den Grössen φ s und p

die Grössen z und ω suchen, so hätte man die mit den vorhergehenden analogen Gleichungen

$$\text{Sin}\,\omega\,\text{Sin}\,z = \text{Sin}\,s\,\text{Sin}\,p,$$

$$\text{Cos}\,\omega\,\text{Sin}\,z = \text{Cos}\,s\,\text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,\varphi - \text{Cos}\,p\,\text{Cos}\,\varphi,$$

$$\text{Cos}\,z = \text{Cos}\,s\,\text{Sin}\,p\,\text{Cos}\,\varphi + \text{Cos}\,p\,\text{Sin}\,\varphi,$$

und wenn man sie differentiirt

$$d\,z = d\,s\,\text{Sin}\,\nu\,\text{Sin}\,p + d\,p\,\text{Cos}\,\nu + d\,\varphi\,\text{Cos}\,\omega,$$

$$d\,\omega\,.\,\text{Sin}\,z = d\,s\,\text{Cos}\,\nu\,\text{Sin}\,p - d\,p\,\text{Sin}\,\nu - d\,\varphi\,\text{Sin}\,\omega\,\text{Cos}\,z.$$

Ex.: Sey $s = 30^\circ$, $p = 100^\circ$ und $\varphi = 50^\circ$ so ist

$$z = 65^\circ\,28'\,7''.2,\ \omega = 32^\circ\,46'\,10''\,3 \text{ und}$$

$$\nu = 20^\circ\,41'\,17''.7.$$

6. §. Probl. Aus der Rectascension a und der Poldistanz p eines Gestirns nebst der Schiefe der Ecliptik e, die Länge λ und die Poldistanz π desselben in Beziehung auf die Ecliptik finden.

Diese Aufgabe reducirt sich auf die Auflösung des sphärischen Dreyecks N S L (fig. 1), wo N der Pol des Äquators, L der Pol der Ecliptik und S das Gestirn ist. — Wir wollen daher zuerst die allgemeine Bezeichnung dieses Dreyecks festsetzen.

Was die Seiten desselben betrifft, so ist offenbar $NL = e$, $NS = p$ und $LS = \pi$. Allein die Winkel S N L und S L N fordern eine nähere Betrachtung.

Wenn man den Bogen L N über N hinaus fortführt, so wird er zugleich senkrecht auf die Ecliptik O E und auf den Äquator O Q stehen, und diese beyden Kreise in den zwey Puncten schneiden, die beyde von dem Durchschnittspuncte O dieser Kreise selbst um 90 Grade entfernt sind. Daraus folgt, dass, wenn man die Bogen L O und N O zieht, der Winkel O L N sowohl, als auch der Winkel L N O ebenfalls 90 Grade beträgt. — Ist also das Gestirn S im ersten Quadranten der Länge oder Rectascension, so ist $Oc = OLc = \lambda$, also auch $SLN = 90 - \lambda$; und eben so ist $Ob = ONB = a$, also auch $SNL = 90 + a$

Wenn aber S in andern Quadraten der Länge oder der Rectascension liegt, scheinen die Winkel S L N und S N L auch andere Bezeichnungen zu erhalten.

Ist z. B. der Stern S′ (fig. 3) im zweyten Quadranten der Länge oder der Rectascension, so hat man

O L S' $= \lambda$, also N L S' $= \lambda - 90$ und O N S' $=$ a, also L N S' $= 360 - a - 90$. Im dritten Quadranten ist eben so O L S'' $= \lambda$, also N L S'' $= \lambda - 90$ und O N S'' $=$ a, also

$$LNS'' = 360 - a - 90,$$

und endlich im vierten Quadranten O L S''' $= \lambda$, also N L S''' $= 360 + 90 - \lambda = 90 - \lambda$ und O N S''' $=$ a''', also L N S''' $= 90 + a - 360$.

Allein, wenn man die beweglichen Bogen L S und N S um die Endpuncte L und N der festen Linie L N sich drehen lässt, und die verschiedenen Verwandlungen sucht, welche durch diese Drehung das sphärische Dreyeck L N S annimmt, so ist offenbar, dass man, der nothwendigen Gleichförmigkeit des Verfahrens wegen, diejenigen Seiten der beyden Bogen L N und N S, die man in dem ersten Quadranten gewählt hat, auch durch alle übrigen Quadranten beybehalten müsse, um in der That immer dasselbe Dreyeck zu betrachten. Hat man also, z. B. als der Stern S im ersten Quadranten war, die in der fig. 3 bezeichneten inneren Seiten gewählt, so werden diese bezeichneten Seiten für den zweyten und dritten Quadranten die äusseren Seiten der Dreyecke L N S' und L N S'' werden, und nur in dem vierten werden sie wieder, so wie in dem ersten, die inneren Seiten des Dreyecks L N S''' seyn. — Es gibt nämlich zwischen je drey Puncten auf einer Kugelfläche immer zwey Dreyecke, der andern nicht zu erwähnen, nämlich erstens das Dreyeck, welches man gewöhnlich zu betrachten pflegt, und zweytens jenes, dessen Fläche die Fläche des ersten zur ganzen Kugelfläche ergänzt, und welches letztere man das Supplementardreyeck nennen könnte. Beyde Dreyecke haben zwar ganz dieselben Seiten, aber die Winkel des einen sind die Ergänzungen der Winkel des andern zu vier rechten Winkeln. Die sämmtlichen bekannten Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie bleiben aber, selbst in Beziehung auf ihre Zeichen, ganz dieselben, wenn man auch in denselben die Seiten $\alpha\,\beta\,\gamma$ des Dreyecks unverändert lässt, und dafür die Winkel A, B, C desselben in $360 - A$, $360 - B$, $360 - C$ übergehen lässt, so dass also alle jene Formeln eben so gut für das gewöhnlich betrachtete, als für das Supplementardreyeck gehören.

Da also, wie die Zeichnung zeigt, in dem zweyten und dritten Quadranten das Supplementardreyeck genommen werden muss, um in der That immer dasselbe Dreyeck zu nehmen, so müssen wir die für diese beyden Quadranten gefundenen Ausdrücke der Winkel an L und N erst von 360 subtrahiren, um die wahren Bezeichnungen dieser Winkel zu erhalten. Es war aber im zweyten Quandraten $NLS'' = \lambda - 90$ und dessen Supplement $360 + 90 - \lambda$ oder endlich $90 - \lambda$, weil zwey Winkel, die nur um $360°$ verschieden sind, als identisch betrachtet werden. Eben so ist von $LNS' = 360 - a - 90$ das Supplement $90 + a$. Im dritten Quadranten erhält man eben so für die wahren Werthe der Winkel NLS'' und LNS'' die Ausdrücke $90 - \lambda$ und $90 + a$. Im vierten Quadranten endlich wurde oben gefunden $NLS''' = 360 + 90 - \lambda$, das heisst $90 - \lambda$ und $LNS''' = 90 + a - 360$, oder, wenn man zu diesem Ausdrucke 360 addirt, wodurch der Winkel selbst nicht geändert wird, $LNS''' = 90 + a$.

Wir haben daher allgemein, in welchem Quadranten der Länge oder der Rectascension sich auch der Stern befinden mag,

für den Winkel an L . . . . $SLN = 90 - \lambda$, und
für den Winkel an N . . . . $SNL = 90 + a$.

Nachdem so die Bezeichnung für das Dreyeck LNS (fig. 1) festgesetzt ist, erhält man sofort durch die bekannten Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie für die Auflösung unserer Aufgabe die Gleichungen (Einl. §. 3)

$$\text{Cos}\,\lambda\,\text{Sin}\,\pi = \text{Cos}\,a\,\text{Sin}\,p\,,$$
$$\text{Sin}\,\lambda\,\text{Sin}\,\pi = \text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,p\,\text{Cos}\,e + \text{Cos}\,p\,\text{Sin}\,e\,,$$
$$\text{Cos}\,\pi = -\text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,e + \text{Cos}\,p\,\text{Cos}\,e.$$

I. Um diese Gleichungen zur Berechnung mit Logarithmen bequemer zu machen, kann man einen Hülfswinkel m so annehmen, dass man hat $\text{tang}\,m = \text{tg}\,p\,\text{Sin}\,a$, so ist

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{\text{tang}\,a}{\text{Sin}\,m}\,\text{Sin}\,(m + e)\,,$$

$$\text{Cos}\,\pi = \frac{\text{Cos}\,p}{\text{Cos}\,m}\,\text{Cos}\,(m + e).$$

Zur Prüfung der Rechnung kann man sich der vorhergehenden Gleichung $\text{Cos}\,\lambda\,\text{Sin}\,\pi = \text{Cos}\,a\,\text{Sin}\,p$ bedienen, die

zugleich zeigt, in welchem Quadranten die Grössen λ und π genommen werden müssen, da π nie grösser als 180° seyn kann.

II. Um zu untersuchen, welchen Einfluss Fehler in a, p und e auf die daraus bestimmten Werthe von λ und π haben, wird man durch die Differentiation der vorhergehenden Gleichungen erhalten

$$d\pi = dp \operatorname{Cos}\eta + da \operatorname{Sin}\eta \operatorname{Sin} p + de \operatorname{Sin}\lambda,$$

$$d\lambda . \operatorname{Sin} p = - dp \operatorname{Sin}\eta + da \operatorname{Cos}\eta \operatorname{Sin} p + de \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Cos}\lambda,$$

wo η der Winkel LSN des Declinationskreises mit dem Breitenkreise ist. Man findet aber diesen Winkel η aus den Gleichungen

$$\operatorname{Sin}\eta = \frac{\operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} e}{\operatorname{Sin}\pi} = \frac{\operatorname{Cos}\lambda \operatorname{Sin} e}{\operatorname{Sin} p},$$

$$\operatorname{Cotg}\eta = \frac{\operatorname{Cotg} e \operatorname{Sin} p + \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos} a} = \frac{\operatorname{Cotg} e \operatorname{Sin}\pi - \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Sin}\lambda}{\operatorname{Cos}\lambda}.$$

III. Eben so wird man, wenn man die Rectascension a' und die Poldistanz p' des Zeniths Z (fig. 1) kennt, die Länge λ' und Poldistanz π' desselben gegen die Ecliptik bestimmen. Es ist aber die Rectascension des Zeniths für jeden gegebenen Augenblick gleich der Sternzeit t dieses Augenblicks, und die Poldistanz des Zeniths ist gleich $NZ = 90 - \varphi$. Man hat daher die Gleichungen

$$\operatorname{Cos}\lambda' \operatorname{Sin}\pi' = \operatorname{Cos} t . \operatorname{Cos}\varphi,$$

$$\operatorname{Sin}\lambda' \operatorname{Sin}\pi' = \operatorname{Sin} t \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} e + \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin} e,$$

$$\operatorname{Cos}\pi' = - \operatorname{Sin} t \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} e + \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} e.$$

7. §. Um eben so aus λ, π und e die Grössen a und p zu finden, hat man

$$\operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} p = \operatorname{Cos}\lambda \operatorname{Sin}\pi,$$

$$\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} p = \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos} e - \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Sin} e,$$

$$\operatorname{Cos} p = \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin} e + \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Cos} e,$$

oder bequemer für Logarithmen

$$\operatorname{tg} n = \operatorname{tg}\pi \operatorname{Sin}\lambda,$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{Sin} n} \operatorname{Sin}(n - e),$$

$$\operatorname{Cos} p = \frac{\operatorname{Cos}\pi}{\operatorname{Cos} n} \operatorname{Cos}(n - e).$$

Zur Beurtheilung der Fehler aber ist, wie zuvor,

$$dp = d\pi \operatorname{Cos}\eta - d\lambda \operatorname{Sin}\eta \operatorname{Sin}\pi - de \operatorname{Sin} a,$$

$$da . \operatorname{Sin} p = d\pi \operatorname{Sin}\eta + d\lambda \operatorname{Cos}\eta \operatorname{Sin}\pi - de \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} p,$$

wo η die vorige Bedeutung hat.

Ex. $\lambda = 129^\circ 38' 50''9$, $\pi = 104^\circ 58' 16''6$ und $e = 23^\circ 27' 42''.6$ gibt $a = 128^\circ 7' 57''.9$, $p = 86^\circ 36' 26''.7$ und $\eta = -14^\circ 44' 34''.6$.

8. §. Für die Sonne werden die vorhergehenden Ausdrücke einfacher, wenn man, da sie sich in der Ebene der Ecliptik bewegt, die Grösse π gleich 90° setzt. Man erhält so die Gleichungen

$$\text{tg}\, a = \text{Cos}\, e\, \text{tg}\, \lambda \text{ und } \text{tg}\, \eta = \text{tg}\, e\, \text{Cos}\, \lambda,$$

$$\text{Cos}\, p = \text{Sin}\, e\, \text{Sin}\, \lambda \qquad \text{Sin}\, \eta = \text{Sin}\, e\, \text{Cos}\, a,$$

$$\text{Cotg}\, p = \text{tg}\, e\, \text{Sin}\, a,$$

$$\text{Cos}\, \lambda = \text{Cos}\, a\, \text{Sin}\, p.$$

Bezeichnet endlich L die Länge der Erde, wie sie aus dem Mittelpuncte der Sonne gesehen wird, so ist $L = 180 + \lambda$ oder auch $\lambda = 180 + L$.

9. §. Die Dreyecke NZS und LNS biethen noch mehrere andere Probleme dar, von welchen wir einige der vorzüglichsten, da sie in der Anwendung selten vorkommen, nur kurz anzeigen wollen.

I. Sind die Grössen p, z und φ gegeben, so findet man s und ω durch die Gleichungen

$$\text{Cos}\, s = \frac{\text{Cos}\, z - \text{Sin}\, \varphi\, \text{Cos}\, p}{\text{Cos}\, \varphi\, \text{Sin}\, p},$$

$$\text{Cos}\, \omega = \frac{\text{Sin}\, \varphi\, \text{Cos}\, z - \text{Cos}\, p}{\text{Cos}\, \varphi\, \text{Sin}\, z}.$$

II. Sind die Grössen s, z und p gegeben, so findet man ω und φ aus den Gleichungen

$$\text{Sin}\, \omega = \frac{\text{Sin}\, s\, \text{Sin}\, p}{\text{Sin}\, z},$$

$$\text{tg}\, x = \text{Cos}\, s\, \text{tg}\, p \text{ und } \text{Sin}\, (\varphi + x) = \frac{\text{Cos}\, x\, \text{Cos}\, z}{\text{Cos}\, p}.$$

III. Auch kann man die Gleichungen des §. 5 und 6. I unter einander verbinden, und dadurch unmittelbar die Lage eines Gestirns gegen die Ecliptik suchen, wenn die Lage desselben gegen den Horizont gegeben ist, und umgekehrt.

Setzt man nämlich in den drey ersten Gleichungen des §. 5. die Grösse $s = t - a$, wo t die Sternzeit der Beobachtung ist, und löst man dann die Ausdrücke $\text{Sin}\,(t - a)$ und $\text{Cos}\,(t - a)$ auf, so gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$\text{Cos a Sin p} = \text{A Sin t} + \text{B Cos t},$$
$$\text{Sin a Sin p} = -\text{A Cos t} + \text{B Sin t},$$
$$\text{Cos p} = \text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos z} - \text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin z Cos}\,\omega,$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$A = \text{Sin}\,\omega\,\text{Sin z und}$$
$$B = \text{Cos}\,\omega\,\text{Sin z Sin}\,\varphi + \text{Cos z Cos}\,\varphi.$$

Substituirt man aber diese Ausdrücke von Cos a Sin p, Sin a Sin p und Cos p in den drey Gleichungen, welche in §. 6. unmittelbar von N. I hergehen, so hat man, wenn man noch weiter abkürzend

$$C = -\text{Cos}\,\omega\,\text{Sin z Cos}\,\varphi + \text{Cos z Sin}\,\varphi$$

setzt, folgende Ausdrücke:

$$\text{Cos}\,\lambda\,\text{Sin}\,\pi = \text{A Sin t} + \text{B Cos t},$$
$$\text{Sin}\,\lambda\,\text{Sin}\,\pi = -(\text{A Cos t} - \text{B Sin t})\,\text{Cos e} + \text{C Sin e},$$
$$\text{Cos}\,\pi = (\text{A Cos t} - \text{B Sin t})\,\text{Sin e} + \text{C Cos e},$$

und diese Gleichungen geben die Grössen λ und π aus ω, z, φ und der Sternzeit t.

IV. Dieselben Ausdrücke kann man endlich auch auf folgende merkwürdige Art finden.

Bestimmt man den Ort des Gestirns gegen den Mittelpunct der Erde durch drey unter einander rechtwinklige Coordinaten x y z, von welchen x in der Mittagslinie, und die Ebene der x y in dem Horizonte liegt, so hat man, wenn man die Entfernung des Gestirns von der Erde gleich der Einheit voraussetzt.

$$x = \text{Cos}\,\omega\,\text{Sin z},$$
$$y = \text{Sin}\,\omega\,\text{Sin z},$$
$$z = \text{Cos z}.$$

Denkt man sich durch die Axe der y eine Ebene, welche gegen die Ebene des Horizonts um den Winkel $90 - \varphi$ geneigt ist, so ist diese neue Ebene der Äquator. Nimmt man dann die rechtwinkligen Coordinaten x′ y′ z′, welche ebenfalls die Lage des Gestirns gegen den Mittelpunct der Erde in Beziehung auf den Äquator bestimmen sollen, so, dass x′ im Meridian und x′ y′ in der Ebene des Äquators liegt, so hat man

$$x' = x\,\text{Sin}\,\varphi + z\,\text{Cos}\,\varphi,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z\,\text{Sin}\,\varphi - x\,\text{Cos}\,\varphi.$$

Verrückt man die Axe der x' im Äquator so, dass die neue Axe der x'' in der Linie der Nachtgleichen und $x''\,y''$ noch in der Ebene des Äquators liegt, so ist, wenn t die Sternzeit bezeichnet,

$$x'' = x' \operatorname{Cos} t + y' \operatorname{Sin} t,$$
$$y'' = x' \operatorname{Sin} t - y' \operatorname{Cos} t,$$
$$z'' = z'.$$

Verrückt man endlich die Ebene der $x''\,y''$ so, dass x''' noch immer in der Linie der Nachtgleichen, aber $x'''\,y'''$ in die Ebene der Ecliptik kömmt, und daher z''' auf der Ecliptik senkrecht steht, so ist

$$x''' = x'',$$
$$y''' = z'' \operatorname{Sin} e + y'' \operatorname{Cos} e,$$
$$z''' = z'' \operatorname{Cos} e - y'' \operatorname{Sin} e.$$

Überdiess hat man auch

$$x''' = \operatorname{Cos} \lambda \operatorname{Sin} \pi,$$
$$y''' = \operatorname{Sin} \lambda \operatorname{Sin} \pi,$$
$$z''' = \operatorname{Cos} \pi.$$

Eliminirt man aus diesen fünf Systemen, deren jedes drey Gleichungen enthält, die zwölf Coordinaten $x\ y\ z \ldots x'''\,y'''\,z'''$, so erhält man

$$\operatorname{Cos} \lambda \operatorname{Sin} \pi = \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Sin} z . \operatorname{Sin} t + (\operatorname{Cos} \omega \operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} \varphi + \operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} \varphi) . \operatorname{Cos} t,$$

$$\operatorname{Sin} \lambda \operatorname{Sin} \pi = - \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} e . \operatorname{Cos} t + (\operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \omega) \operatorname{Cos} e : \operatorname{Sin} t + (\operatorname{Cos} z \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \omega) \operatorname{Sin} e,$$

$$\operatorname{Cos} \pi = \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} e . \operatorname{Cos} t - (\operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \omega) \operatorname{Sin} e . \operatorname{Sin} t, + (\operatorname{Cos} z \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \omega) \operatorname{Cos} e,$$

und diess sind dieselben Gleichungen, welche wir in Nr. III. erhalten haben. Setzt man in ihnen $e = 0$ und $t = 90°$, $\lambda = 90 - s$ und $\pi = p$, so erhält man die Gleichungen des §. 5., welche s, p durch ω, z und φ geben. Setzt man aber in diesen allgemeinen Ausdrücken $\varphi = 90$, $\omega = s$ und $z = p$, so erhält man

$$\operatorname{Cos} \lambda \operatorname{Sin} \pi = \operatorname{Cos} (t - s) \operatorname{Sin} p,$$
$$\operatorname{Sin} \lambda \operatorname{Sin} \pi = \operatorname{Sin} (t - s) \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} e + \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} e,$$
$$\operatorname{Cos} \pi = - \operatorname{Sin} (t - s) \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} e + \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} e,$$

welche Gleichungen mit denen des §. 6 übereinstimmen.

Vorlesung III.

Sonnenzeit und Sternzeit.

§. 1. Man suche die wahre Sonnenzeit T der Culmination eines Gestirns, dessen Lage am Himmel gegeben ist.

Sey a die bekannte Rectascension des Gestirns und $\odot$ die Rectascension der Sonne für den Mittag des gegebenen Tages und d a, d $\odot$ die ebenfalls bekannte Veränderung dieser Grössen zwischen den zwey nächsten, die Culmination des Gestirns einschliessenden Mittagen, alles in Zeit oder so ausgedrückt, dass 24 Stunden gleich 360 Graden, also eine Stunde gleich 15 Graden ist. (Zur Verwandlung des Bogens in Zeit und umgekehrt dient die Tafel III. und IV. am Ende des Werkes.)

Nimmt man, wie hier vorausgesetzt werden kann, die Änderungen d a und d $\odot$ gleichförmig an, so wird für die gesuchte Zeit T der Culmination des Gestirns seyn: die Rectascension des Gestirns $a' = a + T \frac{da}{24}$ und die der Sonne $\odot'$ $= \odot + T. \frac{d\odot}{24}$. Da aber die Sonnenzeit gleich dem Stundenwinkel der Sonne ist, so hat man $T = a' - \odot'$, oder wenn man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von a' und $\odot'$ substituirt, für die gesuchte Sonnenzeit T der Culmination des Gestirns

$$T = \frac{24(a - \odot)}{24 + d\odot - da} = \frac{a - \odot}{1 + \frac{1}{24}(d\odot - da)},$$

für die Zeit der nächstfolgenden Culmination des Gestirns hat man eben so

$$24 + T' = 24 + \frac{(a + da - \odot - d\odot)}{1 + \frac{1}{24}(d\odot - da)},$$

und daher die Sonnenzeit zwischen zwey nächsten Culminationen des Gestirns gleich $24 + T' - T$ oder gleich

$$\frac{24}{1 + \frac{1}{24}(d\odot - da)}.$$

Geht das Gestirn in seiner eigenen Bewegung von Ost nach West oder rückwärts, so ist da negativ, und für Fixsterne, die keine eigene Bewegung haben, ist $da = 0$.

Ex. Den 20. May 1831 ist $\odot = 3^h 45' 45''.0$ und $d\odot = 0^h 3' 59''.6$. Für Merkur aber ist an demselben Tage $a = 4^h 23'$ und $da = -0^h 4'$. Bringt man alle die Zahlen auf Stunden und Theile von Stunden, so findet man für die Sonnenzeit der Culmination Merkurs an diesem Tage

$$T = \frac{0^h.52083}{1 + \frac{0.13322}{24}} = 0^h.617403 = 0^h 37' 2''.6.$$

2. §. Viel einfacher wird die Auflösung dieser Aufgabe, wenn man nicht die Sonnenzeit T, sondern die Sternzeit t der Culmination eines Gestirns sucht. Ist nämlich *a* die Rectascension dieses Gestirns und s der Stundenwinkel desselben, so hat man (S. 25)

$$t = a + s;$$

und da für die Culmination $s = 0$ ist, so hat man, wenn das Gestirn unbeweglich oder auch, wenn a die Rectascension desselben für die Zeit der Culmination selbst ist

$$t = a$$

oder die Sternzeit der Culmination eines Gestirns ist gleich der Rectascension des Gestirns für dieselbe Zeit.

3. §. Diese beyden Ausdrücke von T und t werden uns ein einfaches Mittel verschaffen, eine gegebene Sternzeit in die ihr entsprechende Sonnenzeit und umgekehrt zu verwandeln, eine Aufgabe, die für die practische Astronomie von dem grössten Nutzen ist.

Nach den Beobachtungen beträgt die Zeit, während welcher die Sonne zweymahl in dasselbe Äquinoctium tritt, oder das tropische Sonnenjahr 365.242255 Sonnentage, in welcher Zeit also die Rectascension der Sonne um volle 360 Grade zugenommen hat. Nehmen wir an, dass diese Zunahme der Rectascension durch das ganze Jahr gleichförmig Statt habe, so folgt daraus, dass die Rectascension der Sonne in einem Sonnentage um

$$\frac{360^\circ}{365.242255} = 0^\circ.9856472$$

zunehmen wird, und diese Zahl auf Zeit gebracht, oder

durch 15 dividirt, ist es, welche wir oben durch $d\odot$ bezeichnet haben, so dass man also hat

$$d\odot = \frac{0^\circ.9856472}{15} = 0^h.06570981,$$

oder endlich

$$\frac{d\odot}{24} = 0.0027379 = \frac{1}{365.242255}.$$

Setzt man daher der Kürze wegen $\frac{d\odot}{24} = m$, und nimmt man für Fixsterne $da = 0$ an, so ist unsere vorhergehende Gleichung

$$T = \frac{a - \odot}{1 + m} \text{ oder, da } a = t \text{ war,}$$

$$T = \frac{t - \odot}{1 + m}$$

und diese Gleichung wird uns die Sonnenzeit T geben, wenn die Sternzeit t bekannt ist, und umgekehrt.

Setzt man in der letzten derselben $\odot = 0$, so hat man $T = \frac{t}{1 + m}$, woraus folgt, dass der mittlere Sonnentag $86400(1 + m) = 86636.55456$ Sternzeitsecunden hat, und dass der Sterntag $\frac{86400}{1 + m} = 86164.09133$ Sonnentagsecunden hat, und dass endlich das Sonnenjahr oder 365.242255 Sonnentage gleich $365.242255(1 + m) = 366.242255$ Sterntage ist, oder dass nach der Beendigung eines jährlichen Umlaufs der Sonne, der Fixstern genau einen täglichen Umlauf mehr gemacht hat, als die Sonne. (Zur bequemeren Verwandlung der Minuten und Secunden in Grade oder Stunden und in ganze Tage sehe man Taf. V. und VI.)

4. §. Man kann diese Gleichungen zu ihrem bequemern Gebrauche auch so stellen

$$\left.\begin{aligned} t &= \odot + T + mT \text{ und} \\ T &= t - \odot - \frac{m}{m+1}(t - \odot) \end{aligned}\right\},$$

oder in Zahlen

$$\left.\begin{aligned} t &= \odot + T + 0.0027379\,T \text{ und} \\ T &= t - \odot - 0.0027304(t - \odot) \end{aligned}\right\},$$

und in diesen Ausdrücken bezeichnet $\odot$ die Rectascension der Sonne für den Mittag des gegebenen Tages, T die Sonnenzeit und t die ihr entsprechende Sternzeit an demselben Tage.

I. Zwar ändert die Sonne ihre Rectascension durch den Lauf des ganzen Jahres keineswegs gleichförmig, wie wir oben vorausgesetzt haben; aber die Unterschiede ihrer täglichen Änderungen sind nur gering, und wir werden erst später die Mittel kennen lernen, darauf Rücksicht zu nehmen. Hier wollen wir jene in Rectascension gleichförmig fortschreitende Sonne die mittlere Sonne und ihre Stundenwinkel die mittlere Zeit nennen, zum Unterschiede der wahren Sonnenzeit, welche Benennung wir für die Stundenwinkel der wahren, in der Ecliptik und zwar in derselben sich ungleichförmig bewegenden Sonne aufbewahren werden.

5. §. Man sieht, dass die Berechnung der zweyten Gleichung in §. 4 durch eine kleine Tafel sehr erleichtert wird, welche

für jede Stunde die Zahl $0^h.0027304 = 9''.829$,
für jede Minute - - - - $0''.164$,
für jede Secunde - - - - $0''.0027$ gibt.

Ja dieselbe Tafel wird sich auch für die erste Gleichung in §. 4 anwenden lassen, wenn man bemerkt, dass für $\mu = \frac{m}{m+1}$ diese Gleichung die Form annimmt,

$$t = \odot + T + \mu T + \mu . \mu T + \mu . \mu^2 T + ,$$

so dass man, wenn man die Sternzeit aus der mittlern Zeit sucht, nebst der durch die Tafel gegebenen Reduction μT für T nur noch die durch dieselbe Tafel gegebene Reduction $\mu^2 T$ für μT, und die $\mu^3 T$ für μT u. f. suchen darf. M. s. Taf. VII.

Ex. Sey für den 13. Sept. 1827 die Sternzeit $t = 10^h 48' 17'' 23$ gegeben: man suche die mittlere Sonnenzeit T. Für diesen Tag ist die Rectascension der mittleren Sonne im Augenblicke der Culmination dieser mittlern Sonne in Wien gleich $\odot = 11^h 26' 37''. 61$. Man hat daher nach der zweyten Gleichung in §. 4

$t = 10^h\,48'\,17''.23$
$\odot = 11\;26\;37\;.61$

$23\;21\;39\;.62$
Red......$3\;49\;.63$

$T = 23\;17\;49\;.99$

Die Tafel VII. gibt:

für 23^h...$3'\,46''.08$
$21'$... $3\;.44$
$39''.6$....$0\;.11$

$3\;49.63$

Ist aber umgekehrt diese mittlere Zeit $T = 23^h\,17'\,50''00$ gegeben, so hat man nach der letzten Gleichung

$T = 23^h\,17'\,50''.00$
Red..... $3\;49\;.62$

$23\;21\;39\;.62$
$\odot$. .$11\;26\;37\;.61$

$t = 10\;48\;17\;.23$ wie zuvor.

$3\;46.08$
2.78
0.14

$3\;49.00$
0.49
0.13

$3\;49.62.$

Die Rectascension der mittleren Sonne aber findet man aus derselben Tafel auf folgende Art:

1827....$18^h\,37'\,28''.01$
0 Sept.....$15\;58\;\;2\;.95$
13.... $0\;51\;15\;.22$
Nutat.... $+\;0\;.65$

$11\;26\;46\;.83$
Red. auf Wien $-9\;.22$

$\odot = 11\;26\;37\;.61$

Die kleine Columne der **Nutation** wird erst unten erklärt werden.

Man findet sie für jeden Tag des Jahres so:

Der 13. September ist der 0.70te Theil des Jahres.

1827 . . . Nutation + 0.85 . . . jährl. Differenz 0.28

(0.70)(0.28) = 0.20

Nutat. . . 0.65 wie zuvor

Alles Übrige der Tafel ist für sich klar. Auch lässt sich kürzer der Werth von ⊙ für jeden Mittag aus den sogenannten astronomischen Ephemeriden nehmen.

Dieselbe Tafel wird sich endlich auch anwenden lassen, um ein blosses in mittlerer Zeit gegebenes Intervall in Sternzeit, und umgekehrt, zu verwandeln. Ist z. B. die Sternzeit $8^h\,40'\,30''.1$ gegeben, so hat man

Sternzeit	$8^h\,40'\,30''.1$	$1'\,18''.64$
	1 25 .27	6 .55
		0 .08
Mittl. Zeit	8 39 4 .83	
		1 .25 .27.

Und ist diese mittlere Zeit gegeben, so hat man

Mittlere Zeit	8 39 4.83	1 18 64
	1 25.27	6.39
		0.01
Sternzeit	8 40 30.10 wie zuvor:	
		25.041
		0.16
		0.07
		1 25.27

Vorlesung IV.

Auf- und Untergang der Gestirne.

1. §. Wir erhielten oben (S. 27) die Gleichung

$$\text{Cos}\, z = \text{Cos}\, s\, \text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, \varphi + \text{Cos}\, p\, \text{Sin}\, \varphi.$$

Für den Auf- oder Untergang des Gestirns ist $z = 0$, also auch $\text{Cos}\, s = -\text{tg}\, \varphi\, \text{Cotg}\, p$ oder

$$\text{Cos}\,(180 - s) = \frac{\text{tg}\, \varphi}{\text{tg}\, p},$$

wo also s den Stundenwinkel des auf- und untergehenden Gestirns oder die Zeit ausdrückt, welche zwischen der Culmination und dem Auf- oder Untergange des Gestirns enthalten ist. Man nennt diese Zeit den halben Tagbogen des Gestirns. Wir wollen ihn durch S bezeichnen, so dass man hat

$$\text{Cos}\,(180 - S) = \frac{\text{tg}\, \varphi}{\text{tg}\, p}.$$

Kennt man also die Zeit der Culmination eines Sterns, so wird man von ihr die Grösse S subtrahiren, um die Zeit des Aufganges, und zu ihr S addiren, um die Zeit des Unterganges des Sterns zu erhalten.

Ex. In dem vorhergehenden Beyspiele (S. 35) war für Merkur die Sonnenzeit der Culmination $0^h\, 37'\, 3''$. Es ist aber für jenen Tag die Poldistanz Merkurs $p = 68°\, 33'$. Nimmt man daher $\varphi = 48°\, 12'$ so ist

$$\begin{array}{rl} \log \text{tg}\, \varphi = & 0.04861 \\ \log \text{tg}\, p = & 0.40571 \\ \hline & 9.64290 \end{array}$$

$$180 - S = 63°\, 56'$$

$S = 116°\, 4$ oder nach Taf. III in Zeit $S = 7^h\, 44'\, 16''$

	Culmination	0 37 3
Sonnenzeit	des Untergangs	8 21 19 Abends
- -	des Aufgangs	16 52 47 oder
		4 52 47 Morgens.

Eben so würde man die Sternzeit des Auf- und Unterganges Merkurs erhalten, wenn man in dem Vorhergehenden statt der Sonnenzeit $0^h 37' 3''$ der Culmination, die Sternzeit der Culmination d. h. die Rectascension $a = 4^h 23'$ Merkurs setzt (S. 35). Für die Sonne endlich ist S zugleich die Sonnenzeit ihres Unterganges und $24^h - S$ die des Aufganges.

2. §. Wir wollen nun die erhaltene Gleichung

$$\text{Cos}(180 - S) = \frac{\text{tg}\,\varphi}{\text{tg}\,p}$$

und die aus ihr folgenden Umstände des Auf- und Unterganges der Gestirne näher betrachten.

I. Zuerst ist klar, dass, wenn p kleiner als $90°$ ist, S grösser als $90°$ seyn wird, und umgekehrt, so lange φ positiv ist, d. h. dass Sterne über dem Äquator für uns länger über, als unter dem Horizonte, und dass Sterne unter dem Äquator länger unter, als über dem Horizonte bleiben. $p = 90°$ gibt $S = 90$ oder ein Stern im Äquator bleibt für alle Orte der Erde eben so lange über, als unter dem Horizonte. Ist dieses Gestirn die Sonne, so werden für uns, für die Bewohner der nördlichen Hemisphäre, die Tage in unserem Sommer (wo $p < 90$) länger, und in unserem Winter (wo $p > 90$) kürzer seyn, als die Nächte. Für die Bewohner der südlichen Halbkugel (wo φ negativ ist) ist aber ihr Tag länger, wenn der unsere kürzer ist, oder sie haben Sommer, wenn wir Winter haben, und umgekehrt. Im Frühling und Herbst aber (wo $p = 90$ ist) haben alle Bewohner der Erde Tag und Nacht gleich.

II. Ist $p = \varphi$, so ist $S = 180°$ oder das Gestirn geht nicht mehr auf und unter, sondern berührt nur in seiner untern Culmination den Horizont. Für die Sonne ist diess der Anfang der Jahreszeit ohne Nacht, wo die Sonne immer über dem Horizonte bleibt, und zwar so lange, als $p < \varphi$ ist. Da die Schiefe der Ecliptik $e = 23° 28'$ beträgt, so ist die Poldistanz p der Sonne immer zwischen den Grenzen $66° 32 = 90 - e$ und $113° 28' = 90 + e$ enthalten. Die Bewohner der Erde, für welche die Sonne nur einen Tag im Jahre nicht auf und nur einen nicht untergeht, haben eine nördliche oder südliche Polhöhe, die gleich $90 - e$ ist, und sie sind die Bewohner der beyden Polarkreise, die von den Po-

len des Äquators um die Grösse e entfernt sind. Die noch näher bey den Polen wohnen, haben in ihrem Sommer (wo $90 - p$ und φ gleiche Zeichen haben) die Sonne desto mehr Tage ununterbrochen über, und in ihrem Winter desto länger unter ihrem Horizonte, je näher sie selbst den Polen stehen. Für sie ist die kleinste mittägliche Zenithdistanz

$$z = \varphi - e,$$

wie man aus der ersten Gleichung des §. 1 findet, wenn man in ihr $s = 0$ und $p = 90 - e$ setzt, also desto grösser, oder die Sonne steht selbst in der Mitte des Sommers desto tiefer, je grösser die Polhöhe φ oder je näher der Beobachter bey dem Pole ist. Für den Polarkreis ist $\varphi = 90 - e$, also $z = 90 - 2e = 43° 4'$ und für den Pol selbst ist $\varphi = 90$, also $z = 90 - e = 66° 32'$. Für den Bewohner des Poles ist $\varphi = 90°$, also wie aus der ersten Gleichung des §. 1. folgt, $z = p$ oder die Höhe der Gestirne bleibt durch den ganzen Tag unverändert, so lange ihre Poldistanz sich nicht ändert: sie bleiben sichtbar, so lange $p < 90$ ist, und werden unsichtbar, wenn $p > 90$ wird. Für den Bewohner des Äquators aber ist $\varphi = 0$, also für alle Gestirne $S = 90$ oder sie sind alle eben so lange über als unter dem Horizonte, weil ihre Parallelkreise von dem auf ihnen senkrecht stehenden Horizonte halbirt werden.

III. Ist S' der halbe N a c h t b o g e n oder das Complement von S zu 180°, so hat man $S = 180 - S'$. Substituirt man diesen Werth von S in unserer Gleichung, so erhält man

$$\text{Cos}\,(180 - S) = \frac{\text{tg}\,\varphi}{\text{tg}\,p} \text{ und}$$

$$\text{Cos}\,S' = \frac{\text{tg}\,\varphi}{\text{tg}\,p}.$$

Gibt man in diesen beyden Gleichungen der Grösse p gleiche, aber entgegengesetzte Werthe, so erhält man $\text{Cos}\,(180 - S) = -\text{Cos}\,S'$ oder $S = S'$ d. h. der Tagbogen eines Ortes der Oberfläche der Erde im Sommer ist gleich dem ihm entsprechenden Nachtbogen im Winter; z. B. der längste Tag im Sommer ist gleich der längsten Nacht im Winter. Gibt man eben so, ohne p zu ändern, der Grösse φ gleiche, oben entgegengesetzte Werthe, so erhält man ebenfalls $S = S'$ d. h. zwey von dem Äquator zu beyden Seiten

desselben gleich weit entfernten Beobachtern ist der Tagbogen des einen gleich dem Nachtbogen des andern; der eine hat z. B. den kürzesten Tag, wenn der andere die kürzeste Nacht hat; der eine hat Sommer, wenn der andere Winter hat. Man nennt diese Bewohner desselben Meridians unter gleichen, aber entgegengesetzten Breiten, Perioeci; die Bewohner desselben Parallelkreises aber unter entgegengesetzten Meridianen Antoeci, und endlich die einander diametral gegenüberstehenden Beobachter Antipoden. Die Perioeci haben gleiche Tageszeiten, aber entgegengesetzte Jahreszeiten; die Antoeci haben gleiche Jahreszeiten, aber entgegengesetzte Tageszeiten; und die Antipoden haben entgegengesetzte Tages- und Jahreszeiten.

IV. Man nennt heisse Zone den Theil der Oberfläche der Erde, der zwischen den beyden Wendekreisen enthalten ist, und dessen Bewohner daher die Sonne zweymahl im Jahre in ihrem Zenithe sehen. Die beyden kalten Zonen erstrecken sich von den beyden Polen des Äquators bis zu den beyden Polarkreisen und für ihre Bewohner geht die Sonne mehrere Tage im Jahre nicht auf und mehrere Tage nicht unter. Zwischen den beyden kalten und der heissen Zonen liegen die zwey gemässigten, deren Bewohner die Sonne nie über ihrem Scheitel sehen, und denen sie alle Tage des Jahres auf- und untergeht. Die heisse Zone erstreckt sich also von $\varphi = 0$ bis $\varphi = e = 23° 28'$ in beyden Hemisphären; die gemässigten von $\varphi = e$ bis $\varphi = 90 - e = 66° 32'$ und die kalten von $\varphi = 90 - e$ bis $\varphi = 90$.

Wäre die Schiefe der Ecliptik grösser und z. B. $e = 45°$, so würde die heisse Zone von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 45$ und die beyden kalten von $\varphi = 45$ bis $\varphi = 90$ gehen, und es würde in der obigen Bedeutung des Wortes keine gemässigte Zone geben. Wäre aber $e = 90$ oder stünde die Ecliptik senkrecht auf dem Äquator, so würden alle drey Zonen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90$ gehen, oder jede derselben würde sich über die ganze Erde verbreiten.

V. Um die Zeit zu finden, während welcher für jeden Punct der kalten Zone die Sonne nicht unter- oder nicht aufgeht, hat man für den Anfang oder für das Ende dieser Zeit die Gleichung

$$p = \varphi \ldots (I).$$

Auch ist allgemein für die Sonne (S. 31) $\operatorname{Sin} \lambda = \frac{\operatorname{Cos} p}{\operatorname{Sin} e}$, wo λ und p die Länge und Poldistanz der Sonne bezeichnet. Man hat daher auch für den Anfang oder das Ende jener Zeit die Gleichung

$$\operatorname{Sin} \lambda = \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin} e} \ldots (II).$$

Ist also z. B. durch die Ephemeriden die Poldistanz oder die Länge der Sonne für jeden Tag des Jahres gegeben, so kann man mittelst der Gleichungen I oder II den Anfang oder das Ende jener Zeit bestimmen.

Ist z. B. $\varphi = 90$, so ist, nach der Gleichung I, auch $p = 90$, also der Anfang jener Zeit der 20. März und 22. September, oder in den Polen ist ein halbes Jahr Tag und eben so lange Nacht. Für $\varphi = 80°$ ist $p = 80$, also geht die Sonne vom 16. April bis 27. August für diesen Parallelkreis in der nördlichen kalten Zone nicht unter, und in der südlichen nicht auf. Für $\varphi = 66° 32'$ ist $p = 66° 32'$ oder für diese beyden Parallelkreise geht bloss am 21. Juny die Sonne nicht unter und in der südlichen Hemisphäre nicht auf. Kleinere Werthe von φ als $66° 32'$ geben (nach II) unmögliche Werthe von p, oder für die Bewohner der gemässigten und der heissen Zone geht die Sonne täglich auf und unter, wie zuvor.

Anders würde sich diess alles verhalten, wenn die Schiefe der Ecliptik eine andere wäre. Für $e = 0$ z. B. fällt die Ecliptik mit dem Äquator zusammen, und die Poldistanz p der Sonne wäre durch das ganze Jahr constant und gleich 90. Die Gleichung

$$\operatorname{Cos}(180 - S) = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} p}$$

würde daher $S = 90°$ geben, oder für $e = 0$ würde auf allen Orten der Erde durch das ganze Jahr Tag und Nacht einander gleich seyn.

Wäre aber $e = 90$, oder stünde die Ecliptik senkrecht auf den Äquator, so geht die vorhergehende Gleichung $\operatorname{Sin} \lambda = \frac{\operatorname{Cos} p}{\operatorname{Sin} e}$ in folgende über:

$$\lambda = 90 - p,$$

oder die Länge der Sonne würde immer der Declination derselben gleich seyn. Da auch hier für den Anfang oder das Ende der Zeit, wo die Sonne für einen gegebenen Parallelkreis nicht mehr unter- oder nicht mehr aufgeht, $p = \varphi$ seyn muss, so ist auch

$$\lambda = 90 - \varphi.$$

Für $\varphi = 0$ ist $\lambda = 90$, oder für den Äquator geht die Sonne nicht auf oder nicht unter an den zwey Tagen, wo sie in den Solstitien oder wo ihre Länge 90 oder 270 ist. Für $\varphi = 90$ ist $\lambda = 0$ oder für die Pole ist der Anfang jener Zeit, wenn die Sonne in den Äquinoctien oder wenn ihre Länge 0 oder 180 ist, so dass also auch hier die Pole ein halbes Jahr Tag und eben so lange Nacht haben. Für jeden andern Ort, dessen Entfernung vom Äquator φ ist, hat der Anfang und das Ende jener Zeit Statt, wenn die Länge der Sonne gleich $90 - \varphi$ oder gleich $270 - \varphi$ ist.

3. §. Um den Punct des Horizonts zu finden, in welchem der Stern auf- oder untergeht, wird man in der Gleichung (S. 24)

$$\text{Cos}\, p = \text{Cos}\, z \,\text{Sin}\, \varphi - \text{Sin}\, z \,\text{Cos}\, \varphi \,\text{Cos}\, \omega$$

die Grösse $z = 90$ setzen, wodurch man erhält

$$\text{Cos}\, \omega = -\frac{\text{Cos}\, p}{\text{Cos}\, \varphi},$$

wo ω das Azimut des Sterns bey seinem Auf- oder Untergange ist. Man nennt Morgen- oder Abendweite die Entfernung des auf- oder untergehenden Sterns von dem wahren Ost- oder Westpuncte, im Horizonte gezählt. Bezeichnet also Θ diese Morgen- oder Abendweite, so ist $\omega = 90 + \Theta$ und daher

$$\text{Sin}\, \Theta = \frac{\text{Cos}\, p}{\text{Cos}\, \varphi}.$$

Eben so nennt man die schiefe Aufsteigung A eines Sterns die Entfernung des Frühlingspunctes von dem Puncte des Äquators, der mit dem Sterne zugleich auf- oder untergeht, und die Differenz zwischen der schiefen Aufsteigung und der geraden Aufsteigung (der Rectascension a) heisst die Ascensional-Differenz Δ.

Ist a der untergehende Stern, und zieht man den Bogen

P a, der den Äquator in d unter einem rechten Winkel schneidet, so ist $O d = a$, $O A = 360 - A$ und $A O d = \triangle$. In dem bey d rechtwinkeligen Dreyecke ist $d a = p - 90$ und $a A d = 90 - \varphi$ also auch

$$\text{Sin}\,\triangle = -\,\text{tg}\,\varphi\,\text{Cotg}\,p;$$

und da $A Q = 90$ ist, der halbe Tagbogen des Sterns a oder $d Q = S = 90 - \triangle$.

In der Zeichnung ist der Stern a unter dem Äquator angenommen worden. Für nördliche Sterne ändert Cotg p, also auch Sin $\triangle$ das Zeichen, daher hat man für Sterne über dem Äquator oder überhaupt für alle Sterne

$$\left.\begin{array}{c}\text{Sin}\,\triangle = \text{tg}\,\varphi\,\text{Cotg}\,p \\ S = 90 + \triangle\end{array}\right\}.$$

4. §. Gehen wird wieder zu der Betrachtung der allgemeinen Gleichung

$$\text{Cos}\,z = \text{Cos}\,s\,\text{Sin}\,p\,\text{Cos}\,\varphi + \text{Cos}\,p\,\text{Sin}\,\varphi$$

zurück, aus welcher wir die vorhergehenden Bemerkungen über den Auf- und Untergang der Gestirne abgeleitet haben.

I. Diese Gleichung zeigt, dass zu gleichen Höhen eines Gestirns zu beyden Seiten des Meridians auch gleiche (oder eigentlich um 360° verschiedene) Stundenwinkel gehören, wenn die Poldistanz des Sterns unveränderlich ist. Je näher der Stundenwinkel an Null oder an 360 ist, desto kleiner ist die Zenithdistanz; und je näher der Stundenwinkel an 180 ist, desto grösser ist die Zenithdistanz. Die kleinste Zenithdistanz, wenn die Poldistanz constant ist, hat für $s = 0$ in der oberen Culmination d.h. in dem Durchgange des Gestirns durch den über dem Nordpole liegenden Theil des Meridians Statt; die grösste Zenithdistanz aber hat das Gestirn in der untern Culmination für $s = 180$.

II. Ist aber die Poldistanz p veränderlich, so hat die kleinste oder grösste Zenithdistanz ausser dem Meridian Statt. Setzt man in der vorhergehenden Gleichung das Differenzial von z, in Beziehung auf s und p genommen, gleich Null, so erhält man

$$\text{Sin}\,s = \frac{dp}{ds}\,(\text{Cotg}\,p\,\text{Cos}\,s - \text{tg}\,\varphi),$$

und dieser Ausdruck gibt den Stundenwinkel s der grössten

Höhe: wenn $\frac{dp}{ds}$ das gegebene Verhältniss der Änderung der Poldistanz zu der Änderung des Stundenwinkels ist. Ist z. B. d s eine Zeitsecunde, so bezeichnet $\frac{dp}{ds}$ die Änderung der Poldistanz während einer Zeitsecunde. Da bey allen Gestirnen, die wir kennen, dieses Verhältniss $\frac{dp}{ds}$ nur sehr klein ist, so wird auch Sin s sehr klein, und Cos s nahe gleich der Einheit seyn, so dass man für den Stundenwinkel der grössten oder kleinsten Höhe hat

$$s = \frac{dp}{ds} (\mathrm{Cotg}\, p - \mathrm{tg}\, \varphi).$$

III. Vernachlässigt man diese Änderung der Poldistanz, so hat man für Culminationen auf der Südseite des Zeniths für die Äquatorhöhe $90 - \varphi$ den Ausdruck

$$90 - \varphi = p - z.$$

Für die auf der Nordseite des Zeniths culminirenden, oder für die sogenannten Circumpolarsterne wird man in diesem Ausdrucke für die obere Culmination z und für die untere Culmination sowohl z als auch p negativ setzen, und daher haben

$$\text{obere Culmination } 90 - \varphi = p + z,$$
$$\text{untere Culmination } 90 - \varphi = -p + z.$$

Man sieht aus diesen Ausdrücken, dass ein Stern, für welchen $p < 90 - \varphi$ ist, auf der Nordseite des Zeniths culminirt. Für $p = 90 - \varphi$ culminirt er im Zenithe selbst. Ist ferner $p > 180 - \varphi$, so geht der Stern für den Beobachter, dessen Polhöhe φ ist, nicht mehr auf, und ist $p < \varphi$, so geht er nicht mehr unter (S. 41).

IV. Die in Beziehung auf den Äquator gleichförmige Bewegung der Gestirne wird in Beziehung auf den Horizont schon ungleichförmig erscheinen. Wann erreicht aber z. B. die Änderung der Zenithdistanz ihren grössten und kleinsten Werth?

Lässt man in dem Dreyecke Z P S die beyden Seiten $ZP = 90 - \varphi$ und $PS = p$ constant seyn, und nennt man den Winkel $ZSP = v$, so erhält man (S. 4).

$$\frac{dz}{ds} = \text{Sin}\, v\, \text{Sin}\, p \text{ oder auch}$$

$$\frac{dz}{ds} = \text{Sin}\, \omega\, \text{Cos}\, \varphi.$$

Daraus folgt, dass die Änderung der Zenithdistanz dz am kleinsten und zwar gleich Null ist, für $v = 0$ oder $\omega = 0$ und $\omega = 180$, also in der Ebene des Meridians. Die grösste Änderung der Zenithdistanz aber hat dann Statt, wenn Sin v oder v am grössten, oder wenn Sin ω am grössten ist, d. h. wenn $\omega = 90$ oder $\omega = 270$ ist, also in dem sogenannten ersten Vertikalkreise, dessen Ebene senkrecht auf der Ebene des Meridians steht.

V. Wenn man aber die vollständige Änderung dz der Zenithdistanz eines Gestirns für jeden Punct seines Parallelkreises sucht, so wird man nach dem bekannten Taylorschen Lehrsatze haben

$$z' = z + \left(\frac{dz}{ds}\right) ds + \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right) \cdot \frac{ds^2}{1.2} + \left(\frac{d^3 z}{d^3 s}\right) \cdot \frac{ds^3}{1.2.3} + \ldots$$

wo $z' - z = dz$ die gesuchte Änderung der Zenithdistanz, und wo $\left(\frac{dz}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)$. . . die ersten und zweyten . . . . Differentialien der Grösse z in Beziehung auf s seyn werden, welche Differentialien man auf die gewöhnliche Art aus unserer vorhergehenden Gleichung

$$\text{Cos}\, z = \text{Cos}\, s\, \text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, \varphi + \text{Cos}\, p\, \text{Sin}\, \varphi$$

erhalten wird.

Setzt man, um abzukürzen,

$$m = \frac{\text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, \varphi}{\text{Sin}\, z} \cdot \text{Sin}\, s \text{ und}$$

$$n = \frac{\text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, \varphi}{\text{Sin}\, z} \cdot \text{Cos}\, s,$$

so ist sofort

$$\left(\frac{dz}{ds}\right) = m$$

$$\text{und} \quad \left(\frac{dm}{ds}\right) = n - m^2\, \text{Cotg}\, z,$$

$$\left(\frac{dn}{ds}\right) = -m - mn\, \text{Cotg}\, z,$$

also auch $\left(\frac{d^2 z}{d s^2}\right) = \left(\frac{d m}{d s}\right) = n - m^2 \operatorname{Cotg} z$,

$$\left(\frac{d^3 z}{d s^3}\right) = \left(\frac{d n}{d s}\right) - 2 m \left(\frac{d m}{d s}\right) \operatorname{Cotg} z + \frac{m^2}{\operatorname{Sin}^2 z} \left(\frac{d z}{d s}\right),$$

das heisst, wenn man die vorhergehenden Werthe von $\frac{d m}{d s}$, $\frac{d n}{d s}$ und $\frac{d z}{d s}$ substituirt,

$$\left(\frac{d^3 z}{d s^3}\right) = m^3 (1 + 3 \operatorname{Cotg}^2 z) - 3 m n \operatorname{Cotg} z - m.$$

Fährt man so fort, so erhält man, wenn man der Kürze wegen $\vartheta = \operatorname{Cotg} z$ setzt,

$$\begin{aligned} z' = z + m\, d s + (n - m^2 \vartheta) \frac{d s^2}{1.2}, \\ + (m^3 - m - 3 m n \vartheta + 3 m^3 \vartheta^2) \frac{d s^3}{1.2.3}, \\ + (6 m^2 n - n + (4 m^2 - 3 n^2 - 9 m^4) \vartheta + \\ + 18 m^2 n \vartheta^2 - 15 m^4 \vartheta^3) \frac{d s^4}{1.2.3.4} \ldots \end{aligned}$$

ein Ausdruck, der in der Folge noch nützlich seyn wird.

5. §. Wir wollen diese Betrachtungen noch durch einige verwandte Aufgaben beschliessen, die in der practischen Astronomie öfter ihre Anwendung finden werden.

Sey AC (fig. 4) irgend eine gerade Linie von unbekannter Länge oder $AC = x$. Es sey gegeben I. die Lage dieser Linie gegen den Pol P des Äquators, also die Poldistanzen $AP = p$ und $CP = P$ und II die Sternzeit t, welche diese Linie AC braucht, durch einen Declinationskreis zu gehen, also z. B. die Zeit, welche ein Stern braucht, durch den dem Äquator parallelen Bogen AB zu gehen. Man suche x.

Da diese Zeit t durch den Winkel APC der beyden Poldistanzen AP, CP gemessen wird, oder da $APC = 15\,t$ ist, so kennt man in dem sphärischen Dreyecke PAC zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, und hat daher

$$\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} P + \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} P \operatorname{Cos} 15 t;$$

oder auch

$$\operatorname{Sin}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{Sin}^2 \frac{P - p}{2} + \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin}^2 \frac{15 t}{2}.$$

I. Ist also die Linie oder der Bogen AC schon mit dem Äquator parallel, so ist $p = P$ und daher

$$\text{Sin}\,\frac{x}{2} = \text{Sin}\,p\;\text{Sin}\,\frac{15\,t}{2},$$

ein Ausdruck, der für jede Grösse der Linie $AC = x$ gilt. Ist aber x sehr klein, so kann man dafür annehmen

$$x = 15\,t\,.\,\text{Sin}\,p.$$

Die letzte Gleichung wird man z. B. brauchen, um die Länge (Anzahl der Bogensecunden) eines in dem Brennpuncte eines Fernrohres ausgespannten, dem Äquator parallel gestellten Fadens zu bestimmen.

6. §. Die Multiplication der Grösse t durch 15 in den vorhergehenden Gleichungen gibt die Reduction der beobachteten Zeit auf Bogen. Da nämlich die ganze Peripherie des Kreises in 360° oder in 24^h eingetheilt wird, so wird jede beobachtete Zeit t, die zu dem Bogen x gehört, geben

$$360 : 24 = x : t \text{ oder}$$

$$x = 15\,t.$$

Allein diese einfache Multiplication durch 15 hat nur dann Statt, wenn die Uhr genau nach Sternzeit geht, und wenn überdiess der Stern, den man zur Beobachtung gebraucht hat, keine eigene Bewegung hat oder ein Fixstern ist.

Nehmen wir an, dass die Uhr in einem Sterntage, d. h. in 24 Stunden Sternzeit gebe $24^h + \theta$, wo θ in Secunden ausgedrückt, die Acceleration der Uhr in einem Sterntage bezeichnet. Wenn die Uhr retardirt, so ist θ negativ. — Nehmen wir ferner an, dass das beobachtete Gestirn eine eigene Bewegung in Rectascension habe, und dass es in einem mittleren Tage, d. h. in 24 Stunden mittlerer Zeit sich um $\triangle a$ Raumsecunden vorwärts oder gen Ost bewege, so dass für eine Bewegung gegen West $\triangle a$ negativ seyn wird.

Dieses vorausgesetzt, suche man zuerst die Bewegung $(\triangle a)$ des Gestirns in Raumsecunden während einem Sterntage.

Da (S. 36) der mittlere Tag 86636.55 Sternzeitsecunden hat, so ist

$$86636.55 : \triangle a = 86400 : (\triangle a),$$

$$\text{oder } (\triangle a) = \frac{86400}{86636.55}\,\triangle a.$$

Da nun $24^h + \theta$ der Uhr gleich 24^h Sternzeit sind, und da in 24^h Sternzeit sich der Stundenwinkel um $360 - (\triangle a)$ ändert, so ändert er sich in einer Secunde Uhrzeit um m Raumsecunden, wo m so gefunden wird

$$24^h + \theta : 360^\circ - (\triangle a) = 1'' : m''$$

oder alles in Secunden ausgedrückt

$$86400 + \theta : 1296000 - (\triangle a) = 1 : m,$$

also auch, wenn man statt $(\triangle a)$ den oben gefundenen Werth substituirt,

$$m = \left(15 - \frac{\triangle a}{86636.55}\right)\frac{86400}{86400 + \theta},$$

oder endlich, wenn man den letzten Ausdruck entwickelt, und die zweyten und höheren Potenzen der gewöhnlich sehr kleinen Grössen θ und $\triangle a$ weglässt,

$$m = 15 - 0.0001736\,\theta - 0.0000115\,\triangle a \quad . \; . \; . \; (I).$$

Diese Grösse m wird man also, statt der oben der Kürze wegen angenommenen Zahl 15, brauchen, wenn die Uhr nahe nach Sternzeit geht, und da ist θ die Acceleration der Uhr gen Sternzeit in einem Sterntage, und $\triangle a$ die eigene Bewegung des Gestirns von Ost in einem mittleren Tage θ in Zeitsecunden und $\triangle a$ in Raumsecunden ausgedrückt.

I. Geht aber die Uhr nahe nach mittlerer Zeit, und ist wieder θ die Acceleration der Uhr gegen mittlere Zeit in einem mittleren Tage, und $\triangle a$ die eigene östliche Bewegung des Gestirns ebenfalls in einem mittleren Tage, so wird man so verfahren.

Da in einem mittleren Tage von dem Äquator (S. 35) $360^\circ.9856472 = 1299548''.33$ durch den Meridian gehen, so hat man, wenn in einer Secunde Uhrzeit sich der Stundenwinkel um m Secunden ändert,

$$86400 + \theta : 1299548.33 - \triangle a = 1 : m,$$

also auch

$$m = \left(15.04107 - \frac{\triangle a}{86400}\right)\frac{86400}{86400 + \theta},$$

oder abkürzend

$$m = 15.04107 - 0.0001741\,\theta - 0.0000116\,\triangle a \quad . \; . \; . \; (II),$$

und diese Grösse m wird man der oben gebrauchten Zahl 15 substituiren, wenn die Uhr nahe nach mittlerer Zeit geht, und da ist θ die Acceleration der Uhr und $\triangle a$ die östliche

Bewegung des Gestirns in einem mittleren Tag, θ in Zeitsecunden und $\triangle a$ in Raumsecunden ausgedrückt.

7. §. Man suche die Uhrzeit t, die der gegebene Halbmesser r der Sonne braucht, durch einen Declinationskreis zu gehen.

Ist T die Uhrzeit zwischen zwey nächsten Culminationen der Sonne und p ihre Poldistanz, so wird der Halbmesser der Sonne, auf den Äquator projicirt, (S. 50. I) gleich $\frac{r}{\text{Sin}\,p}$ seyn, und man wird daher haben, wenn r, t und T in Secunden ausgedrückt wird,

$$360 . 60^2 : T = \frac{r}{\text{Sin}\,p} : t \text{ oder}$$

$$t = \frac{Tr}{360 . 60^2\, \text{Sin}\,p},$$

und 2 t ist zugleich die Uhrzeit des Durchgangs der Sonne durch den Meridian an dem Tage, an welchem ihre Poldistanz gleich p ist.

I. Man suche die Uhrzeit t', die der Halbmesser der Sonne braucht, durch einen Höhenkreis zu gehen.

Ist z die Zenithdistanz der Sonne, so ist der Halbmesser derselben auf den Horizont projicirt (S. 50) gleich $\frac{r}{\text{Sin}\,z}$. Nennt man aber s den Stundenwinkel, ω das Azimut der Sonne und v den Winkel ihres Vertikalkreises mit dem Declinationskreise, so ist $\frac{d\,\omega}{d\,s} = \frac{\text{Sin}\,p\,\text{Cos}\,v}{\text{Sin}\,z}$;

und da $d\,\omega = \frac{r}{\text{Sin}\,z}$ und $d\,s = \frac{360 . 60^2\, t'}{T}$ ist, so hat man

$$t' = \frac{Tr}{360 . 60^2\, \text{Sin}\,p\,\text{Cos}\,v} = \frac{t}{\text{Cos}\,v},$$

wo t die vorige Bedeutung hat.

II. Man suche die Zeit t'', die der Halbmesser der Sonne braucht, durch einen gegebenen Almicantarat (S. 13) zu gehen.

Man hat

$$\frac{d\,z}{d\,s} = \text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,v.$$

Aber $d\,z = r$ und $d\,s = \frac{360 . 60^2 . t''}{T}$, also ist

$$t'' = \frac{Tr}{360 \cdot 60^2 \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} v} = \frac{t}{\operatorname{Sin} v},$$

wo t die vorige Bedeutung hat.

Ist dieser Almicantarat der Horizont selbst, so ist

$$\operatorname{Cos} v = \frac{\operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Sin} p}, \text{ also}$$

$$t'' = \frac{Tr}{360 \cdot 60^2 \sqrt{\operatorname{Sin}^2 p - \operatorname{Sin}^2 \varphi}},$$

für die Zeit, welche der Halbmesser der Sonne braucht, auf- oder unterzugehen.

Vorlesung V.

Elliptische Bewegung der Sonne.

§. 1. Wir haben bisher angenommen, dass sich die Sonne jährlich um die Erde, oder eigentlich die Erde um die Sonne in einem Kreise bewegt. Allein nach den von unserem grossen Kepler entdeckten Gesetzen bewegt sich die Erde, nebst mehreren andern Weltkörpern, die unter der Benennung der Planeten und Cometen bekannt sind, in einer Ellipse, deren einen Brennpunct die Sonne einnimmt, und zwar so, dass die von dem Radius Vector (der Distanz der Erde von der Sonne) beschriebenen Flächen sich wie die Zeiten verhalten, in welchen diese Flächen beschrieben werden, und dass sich endlich die Quadrate der Umlaufszeiten dieser Weltkörper um die Sonne, wie die Würfel der grossen Axen ihrer elliptischen Bahnen verhalten.

Sey PMA (Fig. 5.) diese Ellipse, $AC = CP = a$ ihre halbe grosse Axe, und $CF = CF' = a\varepsilon$ ihre Excentricität; $FM = r$ der veränderliche Radius Vector, und der Winkel $PFM = v$, so ist die bekannte Gleichung der Ellipse

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v}.$$

Denken wir uns um die Sonne F als Mittelpunct einen Kreis mit einem willkürlichen Halbmesser beschrieben, und nehmen wir an, dass sich in der Peripherie dieses Kreises ein Punct gleichförmig und so bewege, dass er mit dem Planeten zugleich durch die grosse Axe AP der Ellipse gehe. Sey T die Umlaufszeit dieses Punctes in dem Kreise, die also auch gleich der Umlaufszeit des Planeten in der Ellipse seyn wird, und sey m der Winkel, welchen der be-

wegliche Halbmesser des Punctes mit der Linie FP in t Tagen nach dem Durchgange dieses Punctes durch den Punct P bildet, so hat man, wegen der gleichförmigen Bewegung dieses Punctes,

$$m = 360 \frac{t}{T}.$$

Man nennt diesen um den Brennpunct der Ellipse sich gleichförmig bewegenden Punct den mittleren Planeten. Kennt man also die Grösse T und überdiess die Zeit des Durchganges des Punctes oder des mittleren Planeten durch den Punct P der Axe AP, so kennt man auch t, und sonach für jede gegebene Zeit die Grösse m, die wir daher als bekannt annehmen wollen. Um aber eben so für jede Zeit t, oder, was dasselbe ist, für jeden Werth von m die Grössen r und v, d. h. den wahren Ort des wahren Planeten in der Peripherie der Ellipse PMA zu finden, werden wir so verfahren.

Sey $\frac{1}{2}$ f die Fläche PMF, welche der Radius r in der Zeit t, und eben so $\frac{1}{2}$ F die Fläche, welche er in der Zeit T beschreibt, also $\frac{1}{2}$ F die Fläche der ganzen Ellipse, so hat man, da nach dem Vorhergehenden diese Flächen sich wie ihre Zeiten verhalten,

$$\tfrac{1}{2} f : \tfrac{1}{2} F = t : T \text{ oder}$$

$$f = \frac{F}{T} \cdot t,$$

oder auch, da $\frac{1}{2} F = \varpi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ist, wo $\varpi = 3.1415926$,

$$df = \frac{2 \varpi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T} \cdot dt.$$

Es ist aber auch $df = r^2 dv$, also hat man, wenn man diese beyden Ausdrücke von d f gleich setzt, und für r den oben durch die Gleichung der Ellipse gegebenen Werth, so wie für dt seinen Werth $\frac{T.dm}{360} = \frac{T\,dm}{2\varpi}$ substituirt,

$$\frac{dm}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv}{(1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v)^2}.$$

Diesen Ausdruck leichter zu integriren, kann man ihm folgende Gestalt geben:

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv}{\left[(1+\varepsilon)\operatorname{Cos}^2\frac{v}{2} + (1-\varepsilon)\operatorname{Sin}^2\frac{v}{2}\right]^2}$$

$$= \frac{dv}{(1+\varepsilon)^2 \operatorname{Cos}^4\frac{v}{2}\left[1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}\right]^2}.$$

Setzt man also

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{u}{2};$$

also auch $1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\operatorname{tg}^2 v = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\frac{u}{2}}$, $\frac{\operatorname{Cos}^2\frac{v}{2}}{\operatorname{Cos}^2\frac{u}{2}} = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon\operatorname{Cos} u}$ und

$$dv = \frac{du\operatorname{Cos}^2\frac{v}{2}}{\operatorname{Cos}^2\frac{u}{2}}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}},$$ so erhält man

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{du\operatorname{Cos}^2\frac{u}{2}}{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}\operatorname{Cos}^2\frac{v}{2}}$$ oder

$$dm = du\,(1-\varepsilon\operatorname{Cos} u);$$

und dieser Gleichung Integral ist

$$m = u - \varepsilon\operatorname{Sin} u,$$

wenn m zugleich mit u verschwindet.

Hat man also m aus $m = \frac{360\,t}{T}$ gefunden, so erhält man u aus $m = u - \varepsilon\operatorname{Sin} u$,

und v aus . . $\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{tg}\frac{u}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$,

und endlich r aus . . $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\operatorname{Cos} v} = a(1-\varepsilon\operatorname{Cos} u)$;

und diese Grössen v und r geben den Ort M des wahren Planeten in der Peripherie seiner Ellipse für jede Zeit t nach dem bekannten Durchgange des Planeten durch den Punct P.

Man nennt m die mittlere, u die excentrische und v die wahre Anomalie des Punctes M, und P das Perihelium, so wie A das Aphelium der Ellipse P M A.

2. §. Differentiirt man den vorhergehenden Ausdruck von $\operatorname{tg}\frac{v}{2}$ in Beziehung auf v, u und ε, so erhält man, wenn man der Kürze wegen $\varepsilon = \operatorname{Sin}\varphi$ setzt,

$$\frac{du}{\operatorname{Sin} u} = \frac{dv}{\operatorname{Sin} v} - \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}.$$

Eben so gibt die Gleichung $m = u - \varepsilon \operatorname{Sin} u$,

$$dm = (1 - \varepsilon \operatorname{Cos} u)\, du - \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} \varphi . d\varphi.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Ausdrücken die Grösse du, so ist

$dm = \frac{r^2 dv}{a^2 \operatorname{Cos} \varphi} - \frac{r(a + r - a\varepsilon^2)}{a^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi} \operatorname{Sin} v . d\varphi$; und eben so erhält man

$dv = \frac{a^2}{r^2} \operatorname{Cos} \varphi . dm + \frac{(2 + \varepsilon \operatorname{Cos} v)}{\operatorname{Cos} \varphi} \operatorname{Sin} v . d\varphi$ und

$dr = \frac{r}{a}\, da + a \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Sin} v . dm - a \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} v . d\varphi.$

3. §. Die transcendente Gleichung $m = u - \varepsilon \operatorname{Sin} u$, oder eigentlich

$m = u - \frac{\varepsilon}{\operatorname{Sin} 1''} \operatorname{Sin} u$ wo $\operatorname{Sin} 1'' = \frac{\varpi}{180 \cdot 60^2}$ u ist,

kann nur durch Näherungen oder durch unendliche Reihen aufgelöst werden.

Da die Grösse ε bey den meisten Himmelskörpern nur sehr klein ist, so kann man anfangs

$u = m + \varepsilon \operatorname{Sin} m$ setzen. Ist also
$U = m + \varepsilon \operatorname{Sin} m$ und
$U' = m + \varepsilon \operatorname{Sin} U$ und
$U'' = m + \varepsilon \operatorname{Sin} U'$ u. s. w.

so wird jeder der Werthe U, U', U'' dem wahren Werthe von u desto näher seyn, je weiter man fortgeht.

Auch kann man die bekannte indirecte Methode zur Auflösung dieser Gleichung anwenden, indem man mit irgend einem Werthe von u den Werth von

$\eta = m - u - \varepsilon \operatorname{Sin} u = 0$ sucht. Sind also
$u = a$, $u = a'$ die beyden Hypothesen von m und
$\eta = \alpha$, $\eta = \alpha'$ die Fehler dieser Hypothesen, so hat man für den verbesserten Werth von u gleich

$$a - \frac{\alpha(a - a')}{\alpha - \alpha'}.$$

Ex. I. Sey die mittlere Länge $l = 90° 49' 4''.2$ eines Planeten, und die Länge $P = 121° 4' 36''5$ seines Periheliums gegeben, so ist

$m = l - P = 329^\circ 44' 27''.7$ und $\varepsilon = 0.2453162$, so ist
$u = 320^\circ 52' 15''.5$ und $v = 310^\circ 55' 29''.6$ und
$\log r = 0.330764$, also auch die wahre Länge des Planeten $l' = v + P = 72^\circ 0' 6''.1$, wodurch daher der wahre Ort des Planeten in seiner Bahn gefunden wird, wenn der mittlere Ort desselben bekannt ist.

Ex. II. Um das ganze hier zu beobachtende Verfahren zu zeigen, nehmen wir folgende Elemente der Sonnenbahn an.

Für den mittleren Mittag des 1. Jänners 1828 sey die mittlere Länge der Sonne $= 280^\circ 4' 37''.27$ (also auch die mittlere Länge der Erde, wie sie aus dem Mittelpuncte der Sonne gesehen wird, gleich $100^\circ 4' 37''.27$) und die Länge des Apogeums der Sonne oder des Perigeums der Erde $99^\circ 57' 16''$. Die tägliche Zunahme der mittleren Länge der Sonne sey $0^\circ 59' 8''.33018$ und die ihres Apogeums $0^\circ 0' 0''.16986$, also auch die Bewegung der Sonne in einem gemeinen Jahre von 365 Tagen gleich $359^\circ 45' 40''.51740$ und in einem Schaltjahre von 366 Tagen gleich $360^\circ 44'' 48''.84758$.

Die Bewegung des Apogeums aber in einem gemeinen Jahre gleich $0^\circ 1' 2''$. Die Excentricität der Sonnenbahn endlich sey 0.016793. Daraus wird man leicht für jede andere gegebene Zeit die mittlere Länge der Sonne und des Apogeums finden. Sucht man z. B. diese Grössen für den 10. August des Jahres 1833 um 5 Uhr 32′ 20″ mittl. Zeit von Wien, so hat man

Mittlere Länge der Sonne

1828	280° 4′ 37″.27 . . .
3 gemeine Jahre .	359 17 1 .55
1 Schaltjahr . .	0 44 48 .85
1 gemeines Jahr .	359 45 40 .52
222 Tage . . .	218 48 49 .30
0.23078 Tage . .	0 13 38 .90
mittl. Länge d. Sonne	138° 54′ 36″.39
Länge des Apog. .	100 3 3
mittl. Anom. m =	38 51 33 .39

Länge des Apogeums	
1828	99° 57′ 16″
3 gemeine Jahre . .	3 6
1 Schaltjahr	1 2
1 gemeines Jahr . .	1 2
222 Tage	0 37
0.23078	0 0

Länge des Apogeums 100° 3′ 3″.

Mit diesem Werthe von m und dem angegebenen von ε findet man die wahre Anomalie $v = 37° 40' 17''.14$

	37° 40′ 17″.14
	100 3 3
wahre Länge der Sonne	137 47 20 .14

und den Radius Vector der Sonne oder die Entfernung derselben von der Erde $R = 1.013185$.

Wir werden später Mittel kennen lernen, diese wiederholten Additionen zur Bestimmung der mittleren Orte und selbst der Berechnung der Grössen v und r durch Tafeln sehr abzukürzen.

4. §. Wir wollen nun auch die bekannte Reversion Lagranges auf die vorhergehenden Ausdrücke anwenden.

Vergleicht man den Ausdruck $m - u + \varepsilon \operatorname{Sin} u = 0$ mit dem allgemeinen $y - t - x f y = 0$, und setzt man

u, m, ε, Sin u, Sin m, m und u

statt y, t, x, f y, f t, ψ t und ψ x,

so erhält man

$$u = m + \varepsilon \operatorname{Sin} m + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \frac{d.\operatorname{Sin}^2 m}{dm} + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2.\operatorname{Sin}^3 m}{dm^2} +$$

oder

$$u = m + \varepsilon \operatorname{Sin} m + \frac{\varepsilon^2}{1.2.2} \cdot 2 \operatorname{Sin} 2m +$$

$$\frac{\varepsilon^3}{1.2.3.2^2} (3^2 \operatorname{Sin} 3m - 3 \operatorname{Sin} m),$$

$$+ \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4.2^3} (4^3 \operatorname{Sin} 4m - 4.2^3 \operatorname{Sin} 2m) +,$$

wodurch man u aus m findet.

I. Eben so gibt die Gleichung

$\frac{r}{a} - 1 + \varepsilon \operatorname{Cos} u = 0$ die Reihe

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \operatorname{Cos} m + \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 m + \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2} \frac{d \cdot \operatorname{Sin}^3 m}{dm} + \text{ oder}$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \operatorname{Cos} m - \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} (\operatorname{Cos} 2m - 1) -$$

$$- \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} (3 \operatorname{Cos} 3m - 3 \operatorname{Cos} m) -$$

$$- \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} (4^2 \operatorname{Cos} 4m - 4 \cdot 2^2 \operatorname{Cos} 2m) -$$

wodurch man r aus m findet.

5. §. Ist überhaupt

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = a \operatorname{tg} \frac{y}{2},$$

so ist auch, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen und $b = \frac{a-1}{a+1}$ ist,

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{y\sqrt{-1}} \left[\frac{1 - b e^{-y\sqrt{-1}}}{1 - b e^{y\sqrt{-1}}} \right]$$

$$= e^{-y\sqrt{-1}} \left[\frac{1 - \frac{1}{b} \cdot e^{y\sqrt{-1}}}{1 - \frac{1}{b} \cdot e^{-y\sqrt{-1}}} \right].$$

Nimmt man von den Ausdrücken $1 - b e^{-y\sqrt{-1}}$ und $1 - b e^{y\sqrt{-1}}$ die Logarithmen nach der bekannten Formel

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} +$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{y}{2} + b \operatorname{Sin} y + \tfrac{1}{2} b^2 \operatorname{Sin} 2y + \tfrac{1}{3} b^3 \operatorname{Sin} 3y + \text{ und} \\ \frac{x}{2} &= -\frac{y}{2} - \frac{1}{b} \operatorname{Sin} y - \frac{1}{2b^2} \operatorname{Sin} 2y - \frac{1}{3b^3} \operatorname{Sin} 3y - \end{aligned} \right\},$$

und eben so

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{2} &= \frac{x}{2} - b \operatorname{Sin} x + \tfrac{1}{2} b^2 \operatorname{Sin} 2x - \tfrac{1}{3} b^3 \operatorname{Sin} 3x + \\ \frac{y}{2} &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{b} \operatorname{Sin} x - \frac{1}{2b^2} \operatorname{Sin} 2x + \frac{1}{3b^3} \operatorname{Sin} 3x - \end{aligned} \right\},$$

und alle diese Reihen lassen sich auch unmittelbar auf die beyden Gleichungen anwenden

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{b \operatorname{Sin} y}{1 - b \operatorname{Cos} y} \text{ und } \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{-\frac{1}{b} \operatorname{Sin} y}{1 - \frac{1}{b} \operatorname{Cos} y},$$

die mit der gegebenen $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = a \operatorname{tg}\frac{y}{2}$ identisch sind.

I. Diess vorausgesetzt, gibt die Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{tg}\frac{u}{2}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}},$$

wenn man der Kürze wegen $\theta = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ setzt,

$$\frac{u}{2} = \frac{v}{2} - \theta \operatorname{Sin} v + \tfrac{1}{2}\theta^2 \operatorname{Sin} 2v - \tfrac{1}{3}\theta^3 \operatorname{Sin} 3v + \text{ und}$$

$$\frac{v}{2} = \frac{u}{2} + \theta \operatorname{Sin} u + \tfrac{1}{2}\theta^2 \operatorname{Sin} 2u + \tfrac{1}{3}\theta^3 \operatorname{Sin} 3u +$$

welche Reihen u durch v und v durch u geben.

II. Der letzte Werth von θ gibt auch

$$\varepsilon = \frac{2\theta}{1+\theta^2} \text{ und daher } \frac{\frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{Sin} v}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v} = \frac{\theta \operatorname{Sin} v}{1+\theta^2+2\theta \operatorname{Cos} v}.$$

Sey $\frac{\theta \operatorname{Sin} v}{1+\theta^2+2\theta \operatorname{Cos} v} = A \operatorname{Sin} v - B \operatorname{Sin} 2v + C \operatorname{Sin} 3v -$,
so hat man, wenn man diese Reihe durch $1+\theta^2+2\theta \operatorname{Cos} v$ multiplicirt, die Bedingungsgleichungen

$$A(1+\theta^2) = \theta(1+B)$$
$$B(1+\theta^2) = \theta(A+C)$$
$$C(1+\theta^2) = \theta(B+D) \text{ u. f.};$$

also auch $A = \theta$, $B = \theta^2$, $C = \theta^3$ u. f. und daher

$$\frac{\varepsilon \operatorname{Sin} v}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v} = 2\theta \{\operatorname{Sin} v - \theta \operatorname{Sin} 2v + \theta^2 \operatorname{Sin}^3 v - \theta^3 \operatorname{Sin}^4 v + \}.$$

Allein die letzte Gleichung des §. 1 gibt

$$\operatorname{Cos} u = \frac{\varepsilon + \operatorname{Cos} v}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v} \text{ oder } \operatorname{Sin} u = \frac{\operatorname{Sin} v \sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v}, \text{ das heisst,}$$

$$\frac{\varepsilon \operatorname{Sin} v}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} v} = \frac{2\theta \operatorname{Sin} u}{1-\theta^2},$$

also ist auch

$$\operatorname{Sin} u = (1-\theta^2)(\operatorname{Sin} v - \theta \operatorname{Sin} 2v + \theta^2 \operatorname{Sin} 3v -),$$

und dieser Ausdruck gibt Sin u durch v. Verbindet man ihn mit dem Ausdrucke in II, der u selbst durch v gibt, so findet man nach der Gleichung

$m = u - \varepsilon \operatorname{Sin} u$ folgende Reihe, die m durch v gibt:

$$m = v - 2\varepsilon \operatorname{Sin} v + 2\theta(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\theta) \operatorname{Sin} 2v$$
$$- 2\theta^2(\varepsilon - \tfrac{2}{3}\theta) \operatorname{Sin} 3v$$
$$+ 2\theta^3(\varepsilon - \tfrac{3}{4}\theta) \operatorname{Sin} 4v - \ldots$$

wodurch man m aus verhält.

III. Aus der letzten Reihe erhält man endlich durch Umkehrung

$$v = m + 2\varepsilon \,\mathrm{Sin}\, m + \frac{5}{2^2}\varepsilon^2 \,\mathrm{Sin}\, 2m$$
$$+ \frac{\varepsilon^3}{2^2}\left(\frac{13}{3}\,\mathrm{Sin}\, 3m - \mathrm{Sin}\, m\right)$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{2^3 . 3}\left(\frac{103}{2^2}\,\mathrm{Sin}\, 4m - 11\,\mathrm{Sin}\, 2m\right)$$
$$+ \frac{\varepsilon^5}{2^5}\left(\frac{1097}{2 . 3 . 5}\,\mathrm{Sin}\, 5m - \frac{43}{2}\,\mathrm{Sin}\, 3m + \frac{5}{3}\,\mathrm{Sin}\, m\right) + \ldots$$

Wollte man, wie die älteren Astronomen, die drey Anomalien m, u und v nicht vom Perihelium P, sondern vom Aphelium A zählen, so würde man in allen vorhergehenden Ausdrücken bloss die Grösse ε negativ setzen.

6. §. Um dieselben Aufgaben auch für die Parabel aufzulösen, wollen wir das oben erwähnte Kepler'sche Gesetz zu Hülfe nehmen, nach welchem sich bey den verschiedenen um die Sonne bewegten Körpern die Quadrate der Umlaufszeit wie die Würfel der grossen Axen ihrer Bahnen verhalten. Ist also für einen dieser Körper a die halbe grosse Axe und T die Umlaufszeit, so ist nach diesem Gesetze

$$M = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{T},$$

wo M eine beständige Grösse bezeichnet.

Die Fläche der ganzen Ellipse ist aber

$$\tfrac{1}{2}F = \varpi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} = \varpi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p},$$

wo $p = a(1-\varepsilon^2)$ der halbe Parameter der Bahn ist.

Substituirt man diesen Werth $a^{\frac{3}{2}} = \frac{F}{2\varpi\sqrt{p}}$ in der vorhergehenden Gleichung, so ist

$$M = \frac{F}{2\varpi T\sqrt{p}},$$

also auch, da $\frac{F}{T} = \frac{f}{t}$ ist,

$$M = \frac{f}{2\varpi t\sqrt{p}} \text{ oder } \frac{f}{t} = 2\varpi M.\sqrt{p}.$$

Die Bewegung dieser Himmelskörper um die Sonne ist also, wie die letzte Gleichung zeigt, so beschaffen, dass bey jedem derselben die von dem Radius Vector beschriebe-

nen Flächen sich zu den Zeiten, in welchen sie beschrieben werden, wie die Quadratwurzeln aus dem Parameter ihrer Bahnen verhalten, oder dass man hat

$$\frac{f}{t} = \mu \sqrt{p},$$

wo auch $\mu = 2\varpi M = \frac{2\varpi a^{\frac{3}{2}}}{T}$ eine constante Grösse ist. Um den Werth dieser Constante μ zu finden, bemerken wir, dass man z. B. bey der Erde, wenn man die halbe grosse Axe a ihrer Bahn gleich der Einheit nimmt, für die wahre Umlaufszeit der Erde in ihrer Bahn hat $T = 365.256384$, woraus sofort für alle um die Sonne sich bewegenden Körper folgt

$$\mu = \frac{2\varpi}{T} = \frac{6.2831853}{365.256384} = 0.0172021, \log\mu = 8.2355814,$$

oder in Secunden $\mu = 3548''.19$, $\log\mu = 3.5500065$.

I. Die Gleichung der Parabel erhält man, wenn man in der vorhergehenden Gleichung der Ellipse

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} v}$$

die Grösse $\varepsilon = 1$ setzt, so dass man für die Parabel hat

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{\operatorname{Cos}^2 \frac{v}{2}},$$

wo p der halbe Parameter des Kegelschnittes, also $\frac{1}{2}$ p die Distanz des Brennpunctes von dem Scheitel der Bahn ist. Nennt man daher wieder $\frac{1}{2}$ f die Fläche der Parabel zwischen dem Radius Vector und der grossen Axe, so ist

$$f = \int r^2 dv = \tfrac{1}{2} p^2 \int (1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{v}{2})\, d.\operatorname{tg} \tfrac{v}{2} = \tfrac{1}{2} p^2 (\operatorname{tg} \tfrac{v}{2} + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \tfrac{v}{2}).$$

Ist aber t die Zeit (in Tagen), die seit dem Durchgange des Cometen durch sein Perihelium verflossen ist, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$f = \mu t . \sqrt{p},$$

also auch, wenn man beyde Werthe von f einander gleich setzt,

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2} = \frac{0.0344042}{p^{\frac{3}{2}}}.t = \frac{2\mu t}{p^{\frac{3}{2}}}.$$

Aus dieser Gleichung wird man für jeden gegebenen

Werth von t, die wahre parabolische Anomalie v, und daraus r durch die Gleichung

$$r = \tfrac{1}{2} p \, Sec^2 \tfrac{1}{2} v$$

finden, und so den wahren Ort des Körpers in seiner parabolischen Bahn bestimmen. Da die kubische Gleichung

$$tg \frac{v}{2} + \tfrac{1}{3} tg^3 \frac{v}{2} = 2 \mu t p^{-\frac{3}{2}}$$

nur eine mögliche Wurzel hat, so kann man aus ihr den Werth von v für jedes t auf folgende bequeme Weise suchen.

Sey $tg x = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{3 \mu t}$ und $tg y = \sqrt[3]{tg \frac{x}{2}}$, so ist

$$tg \frac{v}{2} = 2 \, Cotg \, 2 y.$$

Ex. Ist $\log \frac{1}{2} p = 9.0886320$ und $t = 72.99493$ die Anzahl der Tage seit dem Durchgange durch die Sonnennähe, so ist die wahre Anomalie $v = 149° 47' 56''.9$.

7. §. Wir haben in der dritten Vorlesung gezeigt, wie man jede gegebene Sternzeit in mittlere Sonnenzeit und umgekehrt verwandeln kann. Allein diese mittlere Sonnenzeit bezieht sich auf eine bloss imaginäre Sonne, die sich gleichförmig und im Äquator bewegt, während die wahre Sonne sich ungleichförmig in der Ecliptik bewegt.

Im Anfange der gegenwärtigen Vorlesung haben wir eine andere, ebenfalls imaginäre Sonne, unter der Benennung der mittleren Sonne, gebraucht, um aus ihrem Orte den der wahren Sonne in der Ecliptik abzuleiten. Diese mittlere Sonne bewegt sich, wie dort erwähnt wurde, in der Ebene der Ecliptik gleichförmig und so, dass sie mit der wahren Sonne zugleich durch die Puncte A und P der grossen Axe geht. Von ihr ist daher die in der dritten Vorlesung angenommene, oder die zweyte mittlere Sonne dadurch verschieden, dass diese, die zweyte, sich in der Ebene des Äquators ebenfalls gleichförmig und zwar so bewegt, dass sie mit jener ersten mittleren Sonne immer zugleich durch die beyden Puncte der Nachtgleichen geht, woraus also folgt, dass die Länge der ersten mittleren Sonne gleich der Rectascension der zweyten mittleren Sonne ist.

Wie nun, wenn L die Länge der ersten oder die Rec-

ascension der zweyten mittleren Sonne bezeichnet, die mittlere Zeit gleich dem Stundenwinkel der zweyten mittleren Sonne, oder

$$\text{mittl. Zeit} = \text{Sternzeit} - \tfrac{1}{15}\, L$$

ist, so wird auch, wenn A die Rectascension der wahren Sonne bezeichnet, die wahre Zeit gleich dem Stundenwinkel der wahren Sonne oder

$$\text{wahre Zeit} = \text{Sternzeit} - \tfrac{1}{15}\, A$$

seyn. Aus diesen beyden Gleichungen folgt

$$\text{mittl. Zeit} = \text{wahre Zeit} + \tfrac{1}{15}(A - L),$$

und man nennt die Grösse $x = \frac{1}{15}(A - L)$ die Zeitgleichung, die daher, mit ihrem Zeichen, zur wahren Zeit addirt, die oben erwähnte mittlere Zeit geben wird. Da man für jede gegebene mittlere Zeit die Länge L der ersten mittleren Sonne (nach S. 58) leicht finden kann, so wird man daraus nach den Gleichungen der S. 56, die Länge l der wahren Sonne und daraus durch die Gleichung (S. 31), wenn e die Schiefe der Ecliptik bezeichnet,

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{Cos} e \,.\, \operatorname{tg} l$$

die Rectascension A dieser wahren Sonne ableiten, also auch für jede gegebene mittlere Zeit die Zeitgleichung

$x = \frac{1}{15}(A - L)$ bestimmen können.

Dieser Ausdruck von x lässt sich auch leicht in eine Reihe auflösen, deren Glieder bloss von der wahren Länge l der Sonne abhängen. Setzt man nämlich $A - l = R$, so gibt die letzte Gleichung, wenn man sie nach §. 5. S. 60 behandelt, und der Kürze wegen $k = \operatorname{tg}^2 \frac{e}{2}$ setzt,

$$R = -k \operatorname{Sin} 2l + \tfrac{1}{2} k^2 \operatorname{Sin} 4l - \tfrac{1}{3} k^3 \operatorname{Sin} 6l + .$$

Nennt man eben so ϖ die Länge des Perigeums der Sonne, oder, was dasselbe ist, die Länge des Apheliums der Erde, also $l - \varpi$ die wahre Anomalie der Sonne, so ist (§. 5. II)

$$L = l - 2\varepsilon \operatorname{Sin}(l - \varpi) + 2\theta(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\theta) \operatorname{Sin} 2(l - \varpi)$$
$$- \theta^2 (\varepsilon - \tfrac{2}{3}\theta) \operatorname{Sin} 3(l - \varpi) + ,$$

$$\text{wo } \theta = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \text{ ist.}$$

Es war aber $x = \frac{1}{15}(A - L) = \frac{1}{15}(l - L + R)$. Um in diesem Ausdrucke die Länge l der wahren Sonne sowohl, als auch die Rectascension L der zweyten mittlern Sonne

von dem scheinbaren Äquinoctium zu nehmen, wird man der Grösse l die Nutation der Länge, und der Grösse L die Nutation der Rectascension hinzufügen. Die Nutation der Länge aber ist (Vorles. VII.) gleich $-16''.78 \operatorname{Sin} \Omega$, und die Nutationder Rectascension für ein Gestirn im Äquator ist gleich $-15''.39 \operatorname{Sin} \Omega$, so dass man daher hat

$$x = \tfrac{1}{15}(l - 16''.78 \operatorname{Sin} \Omega - L + 15''.39 \operatorname{Sin} \Omega + R) \text{ oder}$$
$$x = \tfrac{1}{15}(l - L + R) - 0''.093 \operatorname{Sin} \Omega.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von R und L, so erhält man

$$x = \frac{1}{15}\left\{\begin{array}{l} 2\varepsilon \operatorname{Sin}(l-\varpi) - 2\theta(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\theta)\operatorname{Sin} 2(l-\varpi) + \\ \qquad 2\theta^2(\varepsilon - \tfrac{2}{3}\theta)\operatorname{Sin} 3(l-\varpi) - \\ -k \operatorname{Sin} 2l + \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{Sin} 4l - \tfrac{1}{3}k^3 \operatorname{Sin} 6l + \end{array}\right\}$$
$$-0''.093 \operatorname{Sin} \Omega.$$

Ja selbst dieser Ausdruck lässt sich noch auf einen andern zurückführen, der bloss von der Länge L der ersten mittleren Sonne abhängt, da man hat (S. 62)

$$l = L + 2\varepsilon \operatorname{Sin}(L-\varpi) + \tfrac{5}{4}\varepsilon^2 \operatorname{Sin} 2(L-\varpi)$$
$$+ \frac{\varepsilon^3}{4}\left(\tfrac{13}{3}\operatorname{Sin} 3(L-\varpi) - \operatorname{Sin}(l-\varpi)\right) + .$$

Führt man diese Reductionen aus, und nimmt man an

für 1800

$$\varepsilon = 0.0167907$$
$$e = 23° 27' 56''.7$$
$$\varpi = 279° 29' 0''.0$$

für 1900

$$\varepsilon = 0.0167451$$
$$e = 23° 27' 4''.6$$
$$\varpi = 281° 12' 36''.0$$

so findet man

für 1800

$$\begin{array}{rl} x = 79''.36 \operatorname{Sin} L & + 435''.82 \operatorname{Cos} L \\ -597.08 \operatorname{Sin} 2L & + 1.57 \operatorname{Cos} 2L \\ -3.42 \operatorname{Sin} 3L & - 18.80 \operatorname{Cos} 3L \\ +13.25 \operatorname{Sin} 4L & - 0.20 \operatorname{Cos} 4L \\ +0.15 \operatorname{Sin} 5L & + 0.88 \operatorname{Cos} 5L \\ -0.40 \operatorname{Sin} 6L & - 0.01 \operatorname{Cos} 6L \\ -0.01 \operatorname{Sin} 7L & - 0.04 \operatorname{Cos} 7L \\ -0''.093 \operatorname{Sin} \Omega & \end{array}$$

für 1900

$$\begin{aligned} x = & \; 93''.38 \,\mathrm{Sin}\, L + 432''.27 \,\mathrm{Cos}\, L \\ & - 596.20 \,\mathrm{Sin}\, 2L + 1.85 \,\mathrm{Cos}\, 2L \\ & - 4.02 \,\mathrm{Sin}\, 3L - 18.62 \,\mathrm{Cos}\, 3L \\ & + 13.20 \,\mathrm{Sin}\, 4L - 0.21 \,\mathrm{Cos}\, 4L \\ & - 0.17 \,\mathrm{Sin}\, 5L + 0.87 \,\mathrm{Cos}\, 5L \\ & - 0.40 \,\mathrm{Sin}\, 6L + 0.01 \,\mathrm{Cos}\, 6L \\ & - 0.01 \,\mathrm{Sin}\, 7L - 0.04 \,\mathrm{Cos}\, 7L \\ & - 0''.093 \,\mathrm{Sin}\, \Omega. \end{aligned}$$

Vorlesung VI.

Praecession.

1. §. Wir beziehen gewöhnlich alle Orte der Gestirne entweder auf den Äquator oder die Ecliptik. Allein diese beyden Ebenen sind selbst nicht unbeweglich im Raume, und es ist daher sehr wichtig, die Veränderungen ihrer Lagen kennen zu lernen.

Sey S E (Fig. 6) die Lage der Ecliptik für irgend eine gegebene Epoche, z. B. für den Anfang des Jahres 1750. Wir wollen sie die *feste* Ecliptik nennen. Der Äquator habe für dieselbe Epoche die Lage S A, so dass er die feste Ecliptik in dem Puncte S schneidet.

Nach t Jahren, also in dem Jahre 1750 + t sey die Ecliptik in die Lage S″ E′ und der Äquator nach S″ A′, und in dem Jahre 1750 + t′ jene nach Σ‴ E″ und dieser nach Σ‴ A″ übergegangen, so dass also der wahre Frühlingspunct in diesen drey Zeiten in S, S″ und Σ‴ ist.

Nach diesen, den Beobachtungen gemässen Darstellungen geht also der Durchschnittspunct des Äquators mit der *festen* Ecliptik *rückwärts*, oder der Äquator geht auf der festen Ecliptik in t Jahren von S nach S′, wodurch daher die Längen und Rectascensionen aller Sterne mit der Zeit immer wachsen, ohne dass, wenn man von der in der That viel langsameren Bewegung der Ecliptik abstrahirt, die Breiten der Sterne eine Änderung leiden. Man nennt diese Bewegung S S′ des Äquators auf der festen Ecliptik die *Lunisolarpraecession*, weil sie, wie wir später sehen werden, bloss eine Folge der Anziehung der Sonne und des Mondes auf die abgeplattete Erde ist. Bezeichnet man diese Lunisolarpräcession in t Jahren oder den Bogen S S′ durch ψ, so hat man, den neuesten Untersuchungen zu Folge,

$$\psi = 50''.3757\, t - 0''.0001217945\, t^2,$$

wo t die Anzahl der seit 1750 verflossenen Jahre bezeichnet. Für Zeiten vor 1750 ist t negativ.

Allein in Beziehung auf die beweglische Ecliptik wird in t Jahren nach jener Epoche der Frühlingspunct nicht in S', sondern in S'' seyn, so dass, wenn in der beweglichen Ecliptik $S''E'$ der Punct S derselbe ist, der in der festen Ecliptik $S'E$ ebenfalls durch S bezeichnet wurde, der Bogen $SS'' = \psi_{,}$ die rückgängige Bewegung des Äquators in der Zeit t auf der beweglichen Ecliptik $S''E'$ darstellt. Man nennt diesen Bogen $SS'' = \psi_{,}$ die allgemeine Präcession, und man hat

$$\psi_{,} = 50''.21129\,t + 0''.0001221483\,t^2.$$

Es ist klar, dass bey diesen Bewegungen beyder Ebenen auch die Neigung derselben gegen einander, oder dass auch die Schiefe der Ecliptik geändert werden müsse. Zur Zeit der Epoche 1750 war diese Schiefe $ESA = 23°\,28'\,18''.0$. Nach t Jahren aber seit dieser Epoche wird diese Schiefe in Beziehung auf die feste Ecliptik $ES'A' = e$ und in Beziehung auf die bewegliche Ecliptik $E'S''A' = e_{,}$ seyn, und man hat, den neuesten Untersuchungen zu Folge,

$$e = 23°\,28'\,18''.0 + 0''.000009842\,t^2$$
$$e_{,} = 23°\,28'\,18''.0 - 0''.48368\,t - 0''.000002723\,t^2.$$

Man sieht daraus, dass die jährliche Lunisolarpräcession

$$\frac{d\psi}{dt} = 50''.3757 - 0.0002435890\,t$$

und die jährliche allgemeine Präcession

$$\frac{d\psi_{,}}{dt} = 50''.21129 + 0.0002442966\,t \text{ ist.}$$

Das Vorhergehende wird genügen, den Einfluss zu bestimmen, welchen diese Bewegungen der beyden Ebenen auf die Rectascension und Declination der Fixsterne haben.

2. §. Zu diesem Zwecke wollen wir zuerst den kleinern Bogen $S'S'' = \theta$ suchen. — In dem sphärischen Dreyecke $S'NS''$ kennt man $NS'S'' = e$, $NS''S' = 180 - e_{,}$ und die Differenz der Seiten $NS' - NS'' = \psi_{,} - \psi$. Man hat aber in jedem Dreyecke A, B, C, wenn die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten durch α, β, γ bezeichnet werden,

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{A-B}{2}},$$

also ist auch

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\psi-\psi_{,}}{2}\operatorname{Cos}\frac{e_{,}-e}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{e_{,}+e}{2}}.$$

Es ist aber nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\psi-\psi_{,}}{2}=0.0822t-0.000122\,t^2$$

$$\frac{e_{,}-e}{2}=-0.2418t-0.00000628\,t^2$$

$$\frac{e_{,}+e}{2}=23^\circ\,28'\,18''.0-0.2418\,t+0.00000356\,t^2,$$

also hat man, wenn man die höheren Potenzen von t weglässt,

$$\theta=(\psi-\psi_{,})\frac{\operatorname{Cos}\frac{e_{,}-e}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{e_{,}+e}{2}}=\frac{0.1644\,t-0.000244\,t^2}{\operatorname{Cos}23^\circ\,28'\,18''}\text{ oder}$$

$$\theta=0''.179\,t-0''.00027\,t^2.$$

3. §. Sey nun die Rectascension a und die Poldistanz p eines Fixsterns für irgend eine Zeit 1750 + t gegeben. Man suche die Rectascension a′ und die Poldistanz p′ desselben für eine andere gegebene Zeit 1750 + t′.

Nennen wir λ und π die Länge und die Distanz des Sterns von dem Pole der festen Ecliptik, wie diese beyden Grössen für die Epoche 1750 Statt hatten, und suchen wir zuerst λ und π aus den gegebenen Grössen a und p.

Da sich die Länge λ in der festen Ecliptik S E auf den Frühlingspunct S, und die Rectascension in dem Äquator S′ A′ auf den Frühlingspunct S″ bezieht, so verlängere man die Bogen E S und D S″ rückwärts, bis sie sich in S′ begegnen, und zähle nun die Längen, sowohl als die Rectascensionen von dem gemeinschaftlichen Puncte S′, so hat man sofort durch die Gleichungen der S. 29 da $S'S''=\theta$ und $SS'=\psi$ bekannt ist,

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Sin}\pi\operatorname{Cos}(\lambda+\psi)=\operatorname{Sin}p\operatorname{Cos}(a+\theta)\\ \operatorname{Sin}\pi\operatorname{Sin}(\lambda+\psi)=\operatorname{Sin}p\operatorname{Sin}(a+\theta)\operatorname{Cos}e+\operatorname{Cos}p\operatorname{Sin}e\\ \operatorname{Cos}\pi=-\operatorname{Sin}p\operatorname{Sin}(a+\theta)\operatorname{Sin}e+\operatorname{Cos}p\operatorname{Cos}e\end{array}\right\}(A)$$

Substituirt man in diesen Gleichungen die vorhergehenden Ausdrücke von ψ und θ, indem man für t seinen gegebenen Werth setzt, so erhält man die gesuchten Werthe von λ und π zur Zeit der Epoche für 1750.

Man suche jetzt aus diesen Grössen λ und π für 1750 die Rectascension a′ und die Poldistanz p′ für die Zeit 1750 + t′. Ist für diese Zeit die Ecliptik in S‴ E″ und der Äquator Σ‴ A″, so zählt man die Länge λ, wie zuvor, auf der festen Ecliptik SE von dem Puncte S, und die Rectascension a′ auf den Äquator Σ‴ A″ von dem Puncte Σ‴, in welchem der Äquator jetzt von der beweglichen Ecliptik S‴ E″ geschnitten wird. Verlängert man also auch hier den Bogen ES und D Σ‴ rückwärts, bis sie sich in dem gemeinschaftlichen Puncte Σ′ begegnen, und bezeichnet man für diese Zeit 1750 + t′ alle Grössen ψ, e und θ durch einen obern Strich, so hat man wieder (wie S. 30)

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Sin}p'\operatorname{Cos}(a'+\theta)=\operatorname{Sin}\pi\operatorname{Cos}(\lambda+\psi')\\ \operatorname{Sin}p'\operatorname{Sin}(a'+\theta')=\operatorname{Sin}\pi\operatorname{Sin}(\lambda+\psi')\operatorname{Cos}e'-\operatorname{Cos}\pi\operatorname{Sin}e'\\ \operatorname{Cos}p'=\operatorname{Sin}\pi\operatorname{Sin}(\lambda+\psi')\operatorname{Sin}e'+\operatorname{Cos}\pi\operatorname{Cos}e'\end{array}\right\}(B)$$

wo $\psi' = 50.3757\,t' - 0.0001218\,t'^2$

$\theta' = 0.\ 179\,t' - 0.00027\,t'^2$ und

$e' = 23°\,28'\,18''.0 + 0.000009842\,t'^2$ ist.

Da man so ψ', θ', e′ und aus den vorigen Gleichungen auch λ und π kennt, so erhält man die gesuchten Werthe von a′ und p′.

4. §. Die sechs angeführten Gleichungen des §. 3 lösen daher unsere Aufgabe vollständig. Durch die Elimination von λ und π lassen sie sich auch auf zwey andere zurückführen, die a′ und p′ unmittelbar durch a und p geben. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe lässt sich aus dem Dreyecke S′ Σ′ D ableiten, wo $S'\Sigma' = \psi' - \psi$, N S′ D = e, N Σ′ D = e′ ist, und daher S′ D, Σ′ D und der Winkel S′ D Σ′ durch jene ersten drey Grössen bestimmt werden kann. Da aber für geringere Zwischenräume t′ — t der beyden gegebenen Zeiten die Differenzen a′ — a = d a und p′ — p = d p meistens nur klein sinp, so wird man aus jenen Gleichungen ein sehr einfaches, ob-

schon genähertes, aber in den meisten Fällen anwendbares Verfahren ableiten, um die Grössen d a und d p zu bestimmen.

Die dritte der Gleichungen (B) gibt

$$dp \, \text{Sin}\, p = - d\psi \, \text{Cos}\,(\lambda + \psi) \, \text{Sin}\, p \, \text{Sin}\, e$$

d. h. nach der ersten der Gleichungen (B)

$$dp = - d\psi \, \text{Cos}\, a \, \text{Sin}\, e,$$

wenn man die zweyten und höheren Dimensionen der sehr kleinen Grösse d ψ, θ... vernachlässigt.

Eben so geben die zwey ersten der Gleichungen (B)

$$\text{tg}\,(a + \theta) = \frac{\text{Sin}\,\pi \, \text{Sin}\,(\lambda + \psi) \, \text{Cos}\, e - \text{Cos}\,\pi \, \text{Sin}\, e}{\text{Sin}\,\pi \, \text{Cos}\,(\lambda + \psi)}$$

also auch, wenn man in Beziehung auf a + θ und ψ differentiirt

$$\frac{da + d\theta}{\text{Cos}^2(a + \theta)} = d\psi \left[\text{Cos}\, e + \text{tg}\,(a + \theta) \, \text{tg}\,(\lambda + \psi)\right]$$

oder, da nach den Gleichungen (A)

$$\text{tg}\,(\lambda + \psi) = \text{tg}\, a \, \text{Cos}\, e + \frac{\text{Cotg}\, p \, \text{Sin}\, e}{\text{Cos}\, a} \text{ ist,}$$

$$\frac{da + d\theta}{\text{Cos}^2(a + \theta)} = d\psi \left(\text{Cos}\, e + \text{tg}^2 a \, \text{Cos}\, e + \frac{\text{Sin}\, a \, \text{Cotg}\, p \, \text{Sin}\, e}{\text{Cos}^2 \alpha}\right).$$

Wir haben daher für die gesuchten Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\psi}{dt} (\text{Cos}\, e + \text{Sin}\, e \, \text{Sin}\, a \, \text{Cotg}\, p) \text{ und} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{d\psi}{dt} \text{Cos}\, a \, \text{Sin}\, e \end{aligned}\right\}.$$

Nennt man also

$$m = -\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \text{Cos}\, e \text{ und}$$

$$n = \frac{d\psi}{dt} \text{Sin}\, e,$$

so hat man für die Präcession in Rectascension und Poldistanz

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= m + n \, \text{Sin}\, a \, \text{Cotg}\, p \\ \frac{dp}{dt} &= - n \, \text{Cos}\, a \end{aligned}\right\};$$

und diese Grössen d a, d t werden mit ihren Zeichen zu den

mittleren Werthen von a und p gesetzt, um die wahren Werthe von a und p zu erhalten.

Es ist aber $\frac{d\psi}{dt} = 50.3757 - 0.0002435 9\,t$,

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.179 - 0.00054\,t \text{ und}$$

$$e = 23^\circ\, 28'\, 18'',$$

also hat man auch

$$m = 46.0282 + 0.000309\,t,$$
$$n = 20.0644 - 0.000097\,t,$$

wo t die Anzahl Jahre nach 1750 sind.

Ex. Für α Bootis (Arctur) ist im Anfange des Jahres 1821 nach den Beobachtungen

$$a = 211^\circ\, 52'\, 26''.0,$$
$$p = \ \ 69\ 52\ 50\ .3.$$

Hier ist $t = 1821 - 1750 = 71$, also $m = 46.0501$ und $n = 20.0575$ und daher

$$\frac{da}{dt} = 46.0501 - 3.8799 = 42.1702,$$

$$\frac{dp}{dt} = 17''.033,$$

oder die Rectascension dieses Sterns wächst mit jedem Jahre seit 1821 um 42''.1702 und die Poldistanz um 17''.033.

5. §. Wir haben in dem Vorhergehenden (S. 63) die Umlaufszeit der Erde gleich A = 365.256384, und früher (S 35) dieselbe Umlaufszeit B = 365.242255 angenommen. Die erste A ist die wahre Umlaufszeit oder die Zeit, in welcher die Erde in der That ihre ganze Peripherie von 360 Graden um die Sonne zurücklegt, oder in welcher sie wieder zu demselben fixen Sterne zurückkehrt, daher sie auch die siderische Umlaufszeit oder die siderische Revolution heisst. Die zweyte B aber ist die Zeit, in welcher die Erde wieder zu demselben Äquinoctium zurückkehrt, und da, wie wir gesehen haben, die Äquinoctien vermöge der Präcession rückwärts gehen, so wird die Erde, von der Sonne aus gesehen, das Äquinoctium früher, als den fixen Stern erreichen, oder B wird kleiner als A seyn. Man nennt B die tropische Revolution der Erde, die unserem bürgerlichen Jahre gleich ist, da die Rückkehr der Sonne zu den

Äquinoctien und Solstitien unsere Jahreszeiten bestimmt. Um die Abhängigkeit dieser Grössen A und B von einander zu bestimmen, sey überhaupt A die Revolution der Erde oder irgend eines andern Himmelskörpers um die Sonne in Beziehung auf irgend einen Punct, also $\frac{360}{A}$ die tägliche Bewegung des Körpers in Beziehung auf denselben Punct. Sey ferner m die tägliche Bewegung eines zweyten Punctes in Beziehung auf jenen ersten, so ist auch $\frac{360}{A} - m$ die tägliche Bewegung des Körpers in Beziehung auf diesen zweyten Punct, und daher die Revolution B des Körpers in Beziehung auf diesen zweyten Punct

$$B = \frac{360}{\frac{360}{A} - m},$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen A und B ist. Geht der zweyte Punct in Beziehung auf den Körper rückwärts, so ist m negativ.

Sey also, um dieses auf unsern Gegenstand anzuwenden, der bewegte Körper die Erde, der erste Punct ein Fixstern und der zweyte das Äquinoctium, so ist die Revolution der Erde in Beziehung auf den ersten Punct oder die siderische Revolution $A = 365.256384$. Die jährliche allgemeine Präcession für das Jahr 1825 ist nach dem Vorhergehenden $\psi_{,} = 50''.2296$, also die tägliche Präcession in Graden gleich $\frac{\psi_{,}}{(365.25)3600} = 0.0000382$. Setzt man daher $m = -0.0000382$ so ist

$$B = \frac{360}{0.985609 + 0.0000382} = \frac{360}{0.9856472},$$ oder die tropische Revolution $B = 365.24225$, wie zuvor. Das tropische Jahr ist also kürzer als das siderische und zwar um die Zeit, welche die Erde braucht, den Bogen zurückzulegen, welcher der jährlichen Präcession gleich ist. Da aber dieser Bogen oder die Grösse $\psi_{,}$ veränderlich ist, so ist auch die Länge des tropischen Jahres veränderlich, während die des siderischen Jahres, so wie die des Sterntages, immer constant bleibt.

Vorlesung VII.

Nutation.

1. §. Die bisher betrachteten, mit der Zeit fortgehenden oder doch in sehr langen Perioden von vielen Jahrtausenden eingeschlossenen Bewegungen der Äquinoctien und der Schiefe der Ecliptik sind noch anderen Störungen unterworfen, die aber in nahe 19 Jahren periodisch wiederkehren, und unter dem Nahmen der **Nutation** bekannt sind. Da die **Knoten** der Mondsbahn d. h. die Durchschnittspuncte dieser Bahn mit der Ebene der Ecliptik in derselben Zeit ihren Umlauf vollenden, so wurde man sehr bald auf die gegründete Vermuthung geführt, dass die Nutation von der Lage jener Knoten abhänge. Eine genauere Untersuchung gab für diese Störungen der Länge $d\lambda$ aller Fixsterne und der Schiefe de der Ecliptik folgende Ausdrücke, in welchen ☊ die Länge des aufsteigenden d. h. desjenigen Knotens der Mondsbahn, von welchem sich der Mond **über** die Ecliptik erhebt, ☉ die Länge der Sonne und endlich ☾ die Länge des Mondes bezeichnet.

$$d\lambda = -16''.783 \text{ Sin} ☊ + 0.161 \text{ Sin} 2 ☊$$
$$- 1.336 \text{ Sin} 2 ☉ - 0.201 \text{ Sin} 2 ☾ \text{ und}$$
$$de = 8''.977 \text{ Cos} ☊ - 0.088 \text{ Cos} 2 ☊$$
$$+ 0.580 \text{ Cos} 2 ☉ + 0.087 \text{ Cos} 2 ☾ .$$

2. §. Sey a und p die Rectascension und Poldistanz eines Sterns, wie beyde ohne Rücksicht auf Nutation Statt haben. Durch diese Nutation aber sollen diese Grössen in a' und p' verändert werden.

Um a' und p' zu finden, suche man zuerst die Länge λ und die Distanz π des Sterns vom Pole der Ecliptik durch die Ausdrücke (S. 29)

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,\lambda = \mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Cos}\,a \\ \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,\lambda = \mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Cos}\,e + \mathrm{Cos}\,p\,\mathrm{Sin}\,e \\ \quad \mathrm{Cos}\,\pi = -\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,e + \mathrm{Cos}\,p\,\mathrm{Cos}\,e \end{array}\right\},$$

wo e die von der Nutation noch befreyte Schiefe der Ecliptik, also (nach S.69), wenn t die Anzahl Jahre seit 1750 bezeichnet, wo

$$e = 23°\,28'\,18''.0 - 0''.48368\,t \text{ ist.}$$

Vermehrt man dann die so gefundenen Werthe von λ und e um die in §. 1. angegebenen Grössen $d\lambda$ und de, so findet man aus der Länge $\lambda + d\lambda$, aus der Breite π und aus der Schiefe $e + de$ die gesuchten Grössen a' und p' durch die Gleichungen (S. 29)

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sin}\,p'\,\mathrm{Cos}\,a' = \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,(\lambda + d\lambda) \\ \mathrm{Sin}\,p'\,\mathrm{Sin}\,a' = \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,(\lambda + d\lambda)\,\mathrm{Cos}\,(e + de) \\ \qquad\qquad - \mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,(e + de) \\ \quad \mathrm{Cos}\,p' = \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,(\lambda + d\lambda)\,\mathrm{Sin}\,(e + de) \\ \qquad\qquad + \mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,(e + de) \end{array}\right\},$$

wodurch unsere Aufgabe aufgelöst ist.

3. §. Da aber die Änderungen $d\lambda$ und de nur klein sind, so wird es in den meisten Fällen besser seyn, aus den vorigen Gleichungen abgekürzte Ausdrücke für $da = a' - a$ und $dp = p' - p$ abzuleiten.

Zu diesem Zwecke hat man

$$a' = a + \left(\frac{da}{d\lambda}\right) d\lambda + \left(\frac{da}{de}\right) de$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2a}{d\lambda^2}\right) d\lambda^2 + \left(\frac{d^2a}{d\lambda\,de}\right) d\lambda\,de + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2a}{de^2}\right) de^2 + ,$$

und eben so

$$p' = p + \left(\frac{dp}{d\lambda}\right) d\lambda + \left(\frac{dp}{de}\right) de + \ldots$$

Es ist aber

$$\left(\frac{da}{d\lambda}\right) = \mathrm{Cos}\,e + \mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Cotg}\,p\,,$$

$$\left(\frac{da}{de}\right) = -\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cotg}\,p\,,$$

$$\left(\frac{dp}{d\lambda}\right) = -\mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Cos}\,a\,,$$

$$\left(\frac{dp}{de}\right) = -\mathrm{Sin}\,a.$$

Vernachlässigt man also die zweyten und höheren Differentialien von a und p, so hat man

$a' - a = (\mathrm{Cos}\, e + \mathrm{Sin}\, e\, \mathrm{Sin}\, a\, \mathrm{Cotg}\, p) . d\lambda - \mathrm{Cos}\, a\, \mathrm{Cotg}\, p . de,$

$p' - p = - \mathrm{Sin}\, e\, \mathrm{Cos}\, a . d\lambda - \mathrm{Sin}\, a . de.$

Substituirt man in diesen beyden Gleichungen die in §. 1 gegebenen Werthe von $d\lambda$ und de, und setzt der Kürze wegen $e = 23° 27' 55''$ für das Jahr 1800, und lässt man endlich die Glieder unter $0''.5$ weg, so erhält man

$$\begin{aligned} a' - a = &- 15''.39\, \mathrm{Sin}\, \Omega - \\ &-(6''.68\, \mathrm{Sin}\, \Omega\, \mathrm{Sin}\, a + 8''.98\, \mathrm{Cos}\, \Omega\, \mathrm{Cos}\, a)\, \mathrm{Cotg}\, p, \\ &- 1.22\, \mathrm{Sin}\, 2 \odot - \\ &-(0.53\, \mathrm{Sin}\, 2 \odot \mathrm{Sin}\, a + 0.58\, \mathrm{Cos}\, 2 \odot \mathrm{Cos}\, a)\, \mathrm{Cotg}\, p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p' - p = &+ 6''.68\, \mathrm{Sin}\, \Omega\, \mathrm{Cos}\, a - 8.98\, \mathrm{Cos}\, \Omega\, \mathrm{Sin}\, a, \\ &+ 0.53\, \mathrm{Sin}\, 2 \odot \mathrm{Cos}\, a - 0.58\, \mathrm{Cos}\, 2 \odot \mathrm{Sin}\, a. \end{aligned}$$

Die scheinbare Schiefe der Ecliptik endlich ist (S. 69) für jedes gegebene Jahr T unserer Zeitrechnung

$e = 23° 28' 18''.0 - 0''.48368\, (T - 1750) + 8''.977\, \mathrm{Cos}\, \Omega,$

oder

$e = 23° 27' 53''.8 - 0''.48368\, (T - 1800) + 8''.977\, \mathrm{Cos}\, \Omega.$

4. §. Um diese Werthe von $a' - a$ und $p' - p$ bequem in eine Tafel zu bringen, bemerke man, dass man einem Ausdrucke der Form

$$A\, (\alpha\, \mathrm{Cos}\, \beta\, \mathrm{Cos}\, \gamma + \mathrm{Sin}\, \beta\, \mathrm{Sin}\, \gamma)$$

immer die Gestalt

$$x\, \mathrm{Cos}\, (\beta - \gamma + y)$$

geben kann, wenn man die Grössen x und y gehörig bestimmt. Setzt man nämlich die Factoren von $\mathrm{Sin}\, \gamma$ und $\mathrm{Cos}\, \gamma$ in beyden Ausdrücken einander gleich, so erhält man

$$A\, \alpha\, \mathrm{Cos}\, \beta = x\, (\mathrm{Cos}\, \beta\, \mathrm{Cos}\, y - \mathrm{Sin}\, \beta\, \mathrm{Sin}\, y) \text{ und}$$

$$A\, \mathrm{Sin}\, \beta = x\, (\mathrm{Sin}\, \beta\, \mathrm{Cos}\, y + \mathrm{Cos}\, \beta\, \mathrm{Sin}\, y),$$

und aus diesen beyden Gleichungen erhält man für x und y die Werthe

$$\mathrm{tg}\, y = \frac{(1-\alpha)\, \mathrm{Sin}\, \beta\, \mathrm{Cos}\, \beta}{1 - (1-\alpha)\, \mathrm{Cos}^2 \beta} \text{ und } x = A . \sqrt{1 - (1 - \alpha^2)\, \mathrm{Cos}^2 \beta}.$$

Wenden wir diess auf den vorhergehenden Ausdruck an

$8.98\, \mathrm{Cos}\, \Omega\, \mathrm{Cos}\, a + 6.68\, \mathrm{Sin}\, \Omega\, \mathrm{Sin}\, a$ oder

$6.68\, (1.3443\, \mathrm{Cos}\, \Omega\, \mathrm{Cos}\, a + \mathrm{Sin}\, \Omega\, \mathrm{Sin}\, a)$ und setzen wir ihn gleich $x\, \mathrm{Cos}\, (y + \Omega - a)$,

wo also $A = 6.68$, $\alpha = 1.3443$, $\beta = \Omega$ und $\gamma = a$ ist, so hat man

$$tg\,y = -\frac{0.3443 \,\mathrm{Sin}\,\Omega \,\mathrm{Cos}\,\Omega}{1 + 0.3443 \,\mathrm{Cos}^2\,\Omega} \text{ und}$$

$$x = 6.68 \sqrt{1 + 0.8071 \,\mathrm{Cos}^2\,\Omega}.$$

Hat man also eine Tafel (Tab. IX), welche für jeden Werth von Ω die Werthe von x und y, und überdiess die Grösse $z = -15''.39 \,\mathrm{Sin}\,\Omega$ gibt, so wird man daraus sehr bequem die von Ω abhängige Nutation durch die beyden Gleichungen finden

$$a' - a = -x \,\mathrm{Cos}\,(\Omega + y - a) \,\mathrm{Cotg}\,p + z \text{ und}$$
$$p' - p = x \,\mathrm{Sin}\,(\Omega + y - a).$$

Will man auch noch den von $\odot$ abhängigen Theil oder die Solarnutation, so wird man in dieselbe Tafel statt mit Ω mit dem Argumente $2\odot$ eingehen, und die so erhaltenen Werthe von $a' - a$ und $p' - p$ durch die constante Zahl 0.08 multipliciren.

Ex. Sey $a = 30^\circ$, $p = 50$, $\Omega = 100^\circ$ und $\odot = 200^\circ$ so ist für die Lunarnutation $y = 3^\circ\, 20'$, $z = -15.16$

$$\begin{array}{rll} \log x = & 0.8302\,n \;\;\ldots & 0.8302 \\ \log \mathrm{Sin}\,(\Omega + y - a) = & 9.4576 \;\;\ldots & \underline{9.9814} \\ \log \mathrm{Cotg}\,p = & \underline{9.9238} & 0.8116 = \log 6''.48 \\ & 0.2116 = \log -1''.63, & \end{array}$$

also auch $a' = a - 1''.63 - 15''.16 = 29^\circ\, 59'\, 43''.21$

$p' = p + 6''.48 \qquad = 50^\circ\;\; 0'\;\; 6''.48.$

Vorlesung VIII.

Aberration.

1. §. Sey S ein Stern (fig. 7) und A die Erde, die sich in ihrer Bahn von A nach B bewegt. Wenn die Erde keine oder doch nur eine gegen die Geschwindigkeit des Lichtes ganz unmerkliche Bewegung hätte, so würde sie den Stern in der wahren Richtung B S oder in der durch A mit B S parallelen Richtung sehen. Wenn aber die Geschwindigkeit der Erde mit der des Lichtes für uns noch vergleichbar ist, und z. B. das Licht den Weg a B in derselben Zeit zurücklegt, in welcher die Erde den Bogen A B = B C beschreibt, so wérden wir den Stern, bey der Ankunft seines Lichtes in unserem Auge, nicht mehr in der wahren Richtung B a, sondern in der Richtung der Diagonale B b des Parallelograms B C a b sehen, und der Winkel S B S′, welcher die Richtung des scheinbaren Strahles B S′ mit dem wahren B S bildet, heisst Aberration.

Suchen wir zuerst das Verhältniss ρ der Geschwindigkeit der Erde zu jener des Lichtes.

Nach den Beobachtungen kommt das Licht von der Sonne zur Erde in 493.218 Secunden mittlerer Zeit. Nach den Gleichungen (S. 57) ist aber

$$r\,dv = \frac{dm}{r}\sqrt{1-\varepsilon^2},$$

wo r den Radius Vector, ε die Excentricität der Erdbahn und d v, d m die wahre und mittlere Bewegung der Erde bezeichnen. Die mittlere siderische Bewegung der Erde in einem mittleren Tage ist 3548″. 19, also in einer Zeitsecunde $\frac{3548 \,.\, 19}{24 \cdot 60^2}$ und daher in 493.218 Zeitsecunden gleich

$$\frac{(493 \,.\, 218)\,(3548 \,.\, 19)}{24 \cdot 60^2} = 20''.255 = d\,m.$$

Also ist auch die wahre Bewegung der Erde in derselben Zeit $= r\,dv$ oder gleich

$$\rho = 20''.255 \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{r}$$

und diese Grösse, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, oder ρ Sin $1'' = 0.0000982$ gibt das gesuchte Verhältniss der Geschwindigkeit der Erde in ihrer jährlichen Bewegung um die Sonne zu der Geschwindigkeit des Lichtes.

I. Eben so können wir auch das Verhältniss ρ' der Geschwindigkeit jedes Punctes der Oberfläche der Erde in ihrer täglichen Bewegung zu der des Lichtes bestimmen.

Ist nämlich H der Halbmesser der Erdbahn und h der des Erdparallels, in welchem sich der Beobachter befindet, so legt die Erde durch ihre jährliche Bewegung in jedem mittleren Tage den Raum

$$M = \frac{2\varpi H}{365.25638},$$

und durch ihre tägliche Bewegung in einem mittleren Tage den Raum

$$m = \frac{2\varpi h}{0.99727}$$

zurück. Ist aber φ die Polhöhe des Beobachters, und bemerkt man, dass der Winkel, unter welchem der Halbmesser der Erde in dem Mittelpuncte der Sonne erscheint, oder dass die Sonnenparallelaxe gleich $8''.55$ ist, so hat man

$$h = 8''55 \text{ Sin } 1''. \text{ H Cos } \varphi, \text{ und da}$$

$$\rho' = 20.255 \frac{m}{M} \text{ ist, so ist auch}$$

$$\rho' = \frac{(365.25638)(8.55) \text{ Sin } 1''. \text{ Cos } \varphi}{0.99727} \cdot 20''.255 \text{ oder}$$

$$\rho' = 0''.31 \text{ Cos } \varphi.$$

II. Nennt man endlich ψ den Winkel, welchen der Radius Vector der Erde mit der Tangente der elliptischen Erdbahn bildet, so ist

$$\text{tg}\,(90 - \psi) = \frac{dr}{r\,dv},$$

oder da, wegen der geringen Excentricität der Erdbahn, der Winkel $90 - \psi$ nur klein ist,

$$\varphi = 90 - \frac{dr}{r\,dv}.$$

Allein die Gleichungen (S. 57) geben, wenn man die höhern Potenzen von ε weglässt,

$$\frac{dr}{r\,dv} = \varepsilon \operatorname{Sin} v.$$

Nennt man also Π die Länge des Apheliums der Erdbahn und L die Länge der Sonne, so ist $v = L - \Pi$ und daher jener Winkel

$$\psi = 90 - \frac{\varepsilon \operatorname{Sin}(L - \Pi)}{\operatorname{Sin} 1''}.$$

Wir wollen künftig der Kürze wegen die Grösse

$L - \frac{\varepsilon \operatorname{Sin}(L - \Pi)}{\operatorname{Sin} 1''}$ setzen, und bemerken, dass man für die Mitte des gegenwärtigen Jahrhunderts hat $\Pi = 280°$ und $\varepsilon = 0.0168$, die halbe grosse Axe der Erdbahn als Einheit angenommen.

2. §. Dieses vorausgesetzt, wollen wir nun den Einfluss bestimmen, welchen die jährliche und tägliche Aberration, oder welchen die Grössen ρ und ρ' auf die scheinbaren Orte der Gestirne haben.

Es werde die Lage des wahren Ortes des Gestirns gegen den Beobachter (analog mit S. 32) durch die beyden Winkel a und b angegeben, wo z. B. a Länge, Rectascension oder Azimut, und b die Distanz des Gestirns vom Pol der Ecliptik, des Äquators oder des Horizonts bezeichnet. Eben so werde die Lage des scheinbaren Orts des Gestirns durch die analogen Grössen a′ b′, und endlich die Lage des Punctes des Himmels von B nach A, nach welchem die Tangente der Bahn des Beobachters gerichtet ist, durch die Winkel A und B angegeben. Wir wollen diesen letzten Punct der Kürze wegen den Erdpunct nennen. Bezeichnet man durch r und r′ die wahre Distanz des Gestirns von dem Anfangs- und Endpuncte des Theiles der Tangente, welchen die Erde in der Zeit von 493″. 218 beschreibt, und nennt man R diesen Theil der Tangente selbst, so hat man für die drey senkrechten Coordinaten, welche die Lage des wahren Orts des Gestirns gegen den Beobachter ausdrücken,

$$x = r \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} a, \quad y = r \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} a, \quad z = r \operatorname{Cos} b,$$

und eben so für den scheinbaren Ort

$$x' = r' \operatorname{Sin} b' \operatorname{Cos} a', \; y' = r' \operatorname{Sin} b' \operatorname{Sin} a', \; z' = r' \operatorname{Cos} b',$$

und endlich für den Erdpunct

$$X = R \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} A, \quad Y = R \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} A, \quad Z = R \operatorname{Cos} B,$$

wo zwischen diesen Coordinaten die Gleichungen Statt haben

$$x' - x + X = o$$
$$y' - y + Y = o$$
$$z' - z + Z = o.$$

Es ist klar, dass man in diesen Ausdrücken auch alle drey Winkel a, a' und A um eine willkürliche Grösse N vermehren kann, und dass wegen der sehr kleinen Grösse R die beyden Entfernungen r und r' sehr nahe gleich seyn werden. Setzt man also $r = r'$ und $\rho = \frac{R}{r}$, wo ρ offenbar die vorige Bedeutung hat, so gehen die drey letzten Gleichungen in folgende über,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} b' \operatorname{Cos}(a' + N) - \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos}(a + N) \\ + \rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}(A + N) = o \\ \operatorname{Sin} b' \operatorname{Sin}(a' + N) - \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin}(a + N) \\ + \rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin}(A + N) = o \\ \operatorname{Cos} b' - \operatorname{Cos} b + \rho \operatorname{Cos} B = o \end{aligned}\right\}$$

und aus diesen drey Gleichungen wird man die Grössen a', b' aus a, b oder umgekehrt auf verschiedene Art bestimmen können.

3. §. Die Division der beyden ersten dieser drey Gleichungen gibt

$$\operatorname{tg}(a' + N) = \frac{\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin}(a + N) - \rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin}(A + N)}{\operatorname{Sin} b \operatorname{Cos}(a + N) - \rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}(A + N)} \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}(a + N) = \frac{\operatorname{Sin} b' \operatorname{Sin}(a' + N) + \rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin}(A + N)}{\operatorname{Sin} b \operatorname{Cos}(a' + N) + \rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}(A + N)}.$$

Setzt man in dem ersten dieser Ausdrücke $N = -a$ und in dem zweyten $N = -a'$, so ist

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(a - a') = \frac{\rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Cosec} b \operatorname{Sin}(A - a)}{1 - \rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Cosec} b \operatorname{Cos}(A - a)} \\ \operatorname{tg}(a - a') = \frac{\rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Cosec} b' \operatorname{Sin}(A - a')}{1 + \rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Cosec} b' \operatorname{Cos}(A - a')} \end{aligned}\right\} \ldots (I)$$

Die Division der beyden letzten jener drey Gleichungen gibt eben so

$$\left.\begin{aligned}\text{Cotg}\, b' &= \frac{(\text{Cos}\, b - \rho\, \text{Cos}\, B)\, \text{Sin}\, (a' + N)}{\text{Sin}\, b\, \text{Sin}\, (a + N) - \rho\, \text{Sin}\, B\, \text{Sin}\, (A + N)} \\ \text{Cotg}\, b &= \frac{(\text{Cos}\, b' + \rho\, \text{Cos}\, B)\, \text{Sin}\, (a + N)}{\text{Sin}\, b'\, \text{Sin}\, (a' + N) + \rho\, \text{Sin}\, B\, \text{Sin}\, (A + N)}\end{aligned}\right\} (A)$$

oder wenn man $N = -A$ setzt,

$$\text{Cotg}\, b' = \frac{(\text{Cos}\, b - \rho\, \text{Cos}\, B)\, \text{Sin}\, (A - a')}{\text{Sin}\, b\, \text{Sin}\, (A - a)},$$

$$\text{Cotg}\, b = \frac{(\text{Cos}\, b' + \rho\, \text{Cos}\, B)\, \text{Sin}\, (A - a)}{\text{Sin}\, b'\, \text{Sin}\, (A - a')}.$$

Aus den beyden Gleichungen (A) aber erhält man, wenn man sie in dem bekannten Ausdrucke

$$\text{tg}\, (b - b') = \frac{\text{Cotg}\, b' - \text{Cotg}\, b}{1 + \text{Cotg}\, b'\, \text{Cotg}\, b}$$

substituirt, und wenn man der Kürze wegen setzt

$$\text{tg}\, u = \frac{\text{tg}\, B\, \text{Cos}\, \tfrac{1}{2}(2\,A - a' - a)}{\text{Cos}\, \tfrac{1}{2}(a' - a)} \text{ und } N = -\frac{(a' + a)}{2},$$

folgende zwey Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\text{Cotg}\, (b' - b) &= \frac{\rho\, \text{Cos}\, B\, \text{Sec}\, u\, \text{Sin}\, (b - u)}{1 - \rho\, \text{Cos}\, B\, \text{Sec}\, u\, \text{Cos}(b - u)} \\ \text{Cotg}\, (b' - b) &= \frac{\rho\, \text{Cos}\, B\, \text{Sec}\, u\, \text{Sin}\, (b' - u)}{1 + \rho\, \text{Cos}\, B\, \text{Sec}\, u\, \text{Cos}\, (b' - u)}\end{aligned}\right\} \ldots (II)$$

I. Die Gleichungen (I) und (II) lassen sich auch in convergirende Reihen auflösen. Man hat nämlich aus der Gleichung

$$\text{tg}\, \frac{x - y}{2} = \frac{\alpha\, \text{Sin}\, y}{1 - \alpha\, \text{Cos}\, y} \text{ die Reihe}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} + \alpha\, \text{Sin}\, y + \frac{\alpha^2}{2}\, \text{Sin}\, 2\, y + \frac{\alpha^3}{3}\, \text{Sin}\, 3\, y + .$$

Also erhält man auch aus den Gleichungen (I)

$$\left.\begin{aligned}a - a' &= m\, \text{Sin}\, (A - a) + \frac{m^2}{2}\, \text{Sin}\, 2\, (A - a) \\ &\quad + \frac{m^3}{3}\, \text{Sin}\, 3\, (A - a) + \\ a - a' &= m'\, \text{Sin}\, (A - a') - \frac{m'^2}{2}\, \text{Sin}\, 2\, (A - a') \\ &\quad + \frac{m'^3}{3}\, \text{Sin}\, 3\, (A - a') - \end{aligned}\right\} (I')$$

wo $m = \rho\, \text{Sin}\, B\, \text{Cosec}\, b$ und $m' = \rho\, \text{Sin}\, B\, \text{Cosec}\, b'$ ist.

Eben so geben die Gleichungen (II)

$$\left.\begin{array}{l} b'-b = n \operatorname{Sin}(b-u) + \frac{n^2}{2} \operatorname{Sin} 2(b-u) \\ \qquad - \frac{n^3}{3} \operatorname{Sin} 3(b-u) + \frac{n^4}{4} \operatorname{Sin} 4(b-u) - \\ b'-b = n \operatorname{Sin}(b'-u) - \frac{n^2}{2} \operatorname{Sin} 2(b'-u) \\ \qquad + \frac{n^3}{3} \operatorname{Sin} 3(b'-u) - \frac{n^4}{4} \operatorname{Sin} 4(b'-u) + \end{array}\right\} \text{(II')}$$

wo in beyden Reihen $n = \rho \operatorname{Cos} B \operatorname{Sec} u$ ist.

Da das Gesetz das Fortganges dieser Reihen offenbar ist, so sind alle vorhergehenden Ausdrücke vollkommen genau. Will man sich aber, was in den meisten Fällen genügt, mit bloss genäherten Ausdrücken begnügen, so wird man von den vorhergehenden Reihen nur die ersten Glieder nehmen, wodurch man erhält

$$a'-a = -\rho \operatorname{Sin} B \operatorname{Cosec} b \operatorname{Sin}(A-a) \quad . \quad . \quad \text{(I'')}$$

$$b-b' = -\rho \operatorname{Cos} B \operatorname{Sec} u \operatorname{Sin}(b-u) \quad . \quad . \quad \text{(II'')},$$

wo $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} B \operatorname{Cos}(A-a)$, also auch

$$b-b' = \rho(\operatorname{Cos} b \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}(A-a) - \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} B) \quad . \quad . \quad \text{(II'')}.$$

4. §. Wenden wir nun diese allgemeinen Ausdrücke auf eine der in der Astronomie gewöhnlichen Ebenen z. B. auf die des Äquators an, d. h. suchen wir die Wirkungen, welche die Aberration auf die Rectascension und Poldistanz der Gestirne hat.

Sey also a die wahre Rectascension und $b = p$ die Poldistanz und eben so a' die scheinbare Rectascension, und $b' = p'$ die scheinbare Poldistanz des Gestirns. Die Länge des Erdpunctes ist (S. 81) gleich $90 + L'$ und die Breite desselben $= 0$. Sey die Rectascension dieses Erdpunctes $A = 90 + L' + y$ und die Poldistanz desselben $B = P$.

Substituirt man diese Werthe von A und B in den zwey Systemen (I), (I') und (II), (II'), so erhält man die genauen Ausdrücke der Aberration in Rectascension und Poldistanz. Die abgekürzten Gleichungen (I''), (II'') aber geben

$$a'-a = -\rho \operatorname{Sin} P \operatorname{Cosec} p \operatorname{Cos}(L'+y-a)$$

$$p'-p = \rho(\operatorname{Sin} P \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin}(L'+y-a) + \operatorname{Cos} P \operatorname{Sin} p).$$

Nennt man dann in einem bey A rechtwinkligen Drey-

ecke A B C den Winkel $ABC = e$, und die Seiten $BC = 90 + L'$, $BA = 90 + L' + y$ und $AC = 90 - P$, so hat man

$$\mathrm{Sin}\,P\,\mathrm{Cos}\,(L' + y) = \mathrm{Cos}\,L'\,\mathrm{Cos}\,e$$
$$\mathrm{Sin}\,P\,\mathrm{Sin}\,(L' + y) = \mathrm{Sin}\,L'$$
$$\mathrm{Cos}\,P = \mathrm{Cos}\,L'\,\mathrm{Sin}\,e\,,$$

also auch, wenn man diese Werthe in den vorhergehenden Gleichungen substituirt,

$$a' - a = -\frac{\rho}{\mathrm{Sin}\,p}\,(\mathrm{Sin}\,L'\,\mathrm{Sin}\,a + \mathrm{Cos}\,L'\,\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,e)$$
$$p' - p = \rho\,\mathrm{Cos}\,p\,(\mathrm{Sin}\,L'\,\mathrm{Cos}\,a - \mathrm{Cos}\,L'\,\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Cos}\,e) + \rho\,\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Cos}\,L'\,\mathrm{Sin}\,e\,,$$

und diess sind die Ausdrücke, welche man mit ihren Zeichen zu den mittleren Grössen a und p setzen muss, um die durch die jährliche Aberration veränderten Grössen a′ und p′ zu erhalten.

I. Nimmt man in diesen Ausdrücken $e = 0$ und setzt $a = \lambda$ die Länge und $p = \pi$ die Distanz des Sterns vom Pol der Ecliptik, so erhält man

$$\lambda' - \lambda = -\frac{\rho}{\mathrm{Sin}\,\pi}\,(\mathrm{Sin}\,L'\,\mathrm{Sin}\,\lambda + \mathrm{Cos}\,L'\,\mathrm{Cos}\,\lambda)$$
$$= -\frac{\rho}{\mathrm{Sin}\,\pi}\,\mathrm{Cos}\,(L' - \lambda)$$
$$\pi' - \pi = \rho\,\mathrm{Cos}\,\pi\,(\mathrm{Sin}\,L'\,\mathrm{Cos}\,\lambda - \mathrm{Cos}\,L'\,\mathrm{Sin}\,\lambda)$$
$$= \rho\,\mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,(L' - \lambda)\,,$$

und diese beyden Ausdrücke geben die Aberration der Sterne in Länge und Breite; für die Sonne ist $\pi = 90^\circ$ und $L' = \lambda$, also auch

$$\lambda' - \lambda = -\rho \text{ und}$$
$$\pi' - \pi = 0.$$

II. Wendet man auf diese Ausdrücke die Reduction der S. 77 an, so ist

$$\mathrm{tg}\,y = \frac{\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,e\,\mathrm{Sin}\,2\,L'}{1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,e\,\mathrm{Cos}^2\,L'} \text{ und } x = \rho\sqrt{1 - \mathrm{Sin}^2\,e\,\mathrm{Cos}^2\,L'}$$

wodurch die vorhergehenden Gleichungen in folgende übergehen

$$a' - a = -\frac{x}{\mathrm{Sin}\,p}\,\mathrm{Cos}\,(L' + y - a) \text{ und}$$
$$p' - p = x\,\mathrm{Cos}\,p\,\mathrm{Sin}\,(L' + y - a) + \tfrac{1}{2}\,\rho\,\mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Sin}\,(p + L) + \tfrac{1}{2}\,\rho\,\mathrm{Sin}\,e\,\mathrm{Sin}\,(p - L)$$

und nach diesen Ausdrücken ist die Taf. VIII. berechnet worden.

Ex. Ist $a = 261^\circ 31'$, $p = 77^\circ 17'$, $L' = 40^\circ 52'$, so ist
$\log x = 1.2859$, $y = 2^\circ 28'$ also
$a' - a = + 15''.6$ und
$p' - p = 2''.6 + 2''.4 + 3''.6 = + 8''.6$.

5. §. Suchen wir eben so die tägliche Aberration in Beziehung auf den Äquator. — Nennt man T die Sternzeit der Beobachtung, so geht die Richtung, welche der Richtung der täglichen Bewegung des Beobachters auf der Erde entgegengesetzt ist, nach einem Punct des Himmels, dessen Rectascension gleich T — 90, oder wenn man diesen Bogen um 360° vermehrt, = 270 + T, und dessen Poldistanz gleich 90° ist. Es ist daher

$$A = 270 + T \text{ und } B = 90.$$

Setzt man überdiess $a = a$ und $b = p$ und $\rho = \rho'$, und substituirt man diese Werthe von A, B, a, b, in den Gleichungen (II) oder (II'), so erhält man die vollständigen Ausdrücke der täglichen Aberration in Beziehung auf den Äquator. Die Gleichungen (I'') und (II'') aber geben

$$a' - a = \rho' \frac{\mathrm{Cos}\,(T - a)}{\mathrm{Sin}\,p},$$

$$p - p' = \rho' \,\mathrm{Sin}\,(T - a)\,\mathrm{Cos}\,p,$$

oder da $\rho' = 0''.31\,\mathrm{Cos}\,\varphi$ war,

$$a' - a = 0''.31 \frac{\mathrm{Cos}\,(T - a)\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,p},$$

$$p' - p = - 0''.31\,\mathrm{Sin}\,(T - a)\,\mathrm{Cos}\,p\,\mathrm{Cos}\,\varphi.$$

6. §. Bisher haben wir das Gestirn als ruhend vorausgesetzt. Sey nun S der Ort des beweglichen Gestirns zur Zeit T, in welcher der Lichtstrahl von ihm ausging, und O das Auge des Beobachters oder der Ort des Oculars des Fernrohres für dieselbe Zeit T. Sey eben so t und t' die Zeit, in welcher jener erste Lichtstrahl von dem Gestirn in das Objectiv a und in das Ocular B des nach dem scheinbaren Orte des Gestirns gerichteten oder des beweglichen Fernrohrs A a oder B b kommt. Diess vorausgesetzt, ist also O S die Richtung des wahren Orts des Sterns zur Zeit T, und A a oder B b ist die Richtung des scheinbaren Orts des Sterns zur Zeit t oder t', (welche beyden letzten Zeiten t und t' nur unendlich wenig von einander verschieden sind).

Nimmt man die Bewegung des Lichtes gleichförmig an,

so verhalten sich, da S, a, B in einer geraden Linie liegen, die Linien Sa und aB wie die Zeiten, in welchen das Licht diese Linien durchläuft, oder es ist

$$Sa : aB = t - T : t' - t.$$

Nimmt man eben so die Bewegung der Erde in der Tangente OB ihrer Bahn während der immer sehr kleinen Zeit t — T als gleichförmig und geradlinig an, so werden auch die Puncte o, a, b in einer geraden Linie liegen, und man wird haben

$$oa : ab = t - T \cdot t' - t.$$

Daraus folgt

$$\frac{Sa}{aB} = \frac{oa}{ab}.$$

Da überdiess der von den eben genannten Seiten eingeschlossene Winkel Sao = Bab ist, so sind die Dreyecke Sao und Bab ähnlich, oder es ist der Winkel aSo gleich dem Winkel aBb, das heisst, es ist Bb oder Aa mit OS parallel, oder mit andern Worten: der scheinbare Ort BbS' zur Zeit t ist gleich dem wahren Orte OoS zur Zeit T.

Sey also Δ die Distanz des Gestirns von der Erde in Theilen der halben grossen Axe der Erdbahn ausgedrückt, und m die tägliche Bewegung des Gestirns in Secunden ausgedrückt, so ist

$$1 : \Delta = 493.218 : \theta,$$

oder das Licht braucht $\theta = 493.218\ \Delta$ Zeitsecunden, von dem Gestirn zur Erde zu kommen.

Ferner ist

$$86400 : \theta = m : x,$$

oder die Bewegung des Gestirns in dieser Zeit θ ist gleich $x = \frac{m\,\theta}{86400} = 0.00571\ m\ \Delta$, und dieser Werth von x ist also auch, nach dem Vorhergehenden, der Unterschied zwischen dem wahren Orte des Gestirns zur Zeit T, und dem scheinbaren Orte desselben zu der Beobachtungszeit t. Ist daher a die wahre Länge oder Breite oder Rectascension . . des Gestirns und a' die scheinbare oder beobachtete Länge oder Breite . . desselben, und ist m die tägliche Veränderung dieser Länge, Breite . . so hat man

$$a = a' + 0.00571\ m\ \Delta.$$

Nimmt die Länge, Breite . . des Gestirns ab, so ist in der letzten Gleichung die Grösse m negativ.

Für die Sonne ist $\Delta = 1$ und $m = 3547''3$, also

$$\text{wahre Länge} \odot = \text{scheinb. Länge} \odot + 20''.255$$

wie zuvor.

Unsere Sonnentafeln geben schon diese scheinbare, durch die Aberration veränderte Länge der Sonne an. Hat man also die scheinbare Länge, Breite, Rectascension . . . eines beweglichen Gestirns oder die Grösse a' zur Zeit t beobachtet, und will man für dieselbe Zeit t die wahre Länge oder die Grösse a des Gestirns haben, so ist

$a = a' + 0.00571\, m\, \Delta$ und für dieselbe Zeit t gehört die wahre Länge L der Sonne

$$L = L' + 20''.255,$$

wo L' die für die Zeit t aus den Tafeln berechnete oder die tabellarische Länge der Sonne bezeichnet.

7. §. Wir wollen nun, zum bequemern Gebrauche bey den Beobachtungen, die bisher betrachteten Änderungen, welche die Rectascension und die Poldistanz der Fixsterne durch die Präcession, Nutation und Aberration erfahren, zusammenstellen.

Nennt man a und p die mittlere Rectascension und Poldistanz eines Sterns, wie man sie in den sogenannten Sternkatalogen verzeichnet findet, und ist eben so a' und p' die scheinbare oder beobachtete Rectascension und Poldistanz dieses Sterns, $\odot$ die Länge der Sonne und Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondsbahn, so hat man, wenn man, was immer hinreicht, die Excentricität ε der Erdbahn gleich Null setzt,

$$\begin{aligned} a' - a = & (46''.0545 + 20''.0562 \operatorname{Sin} a \operatorname{Cotg} p).\, t \\ & - 20.255 \frac{\operatorname{Cos} e \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} p} \operatorname{Cos} \odot, \\ & - 20.255 \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} \odot}{\operatorname{Sin} p}, \\ & - 0.58 \operatorname{Cos} a \operatorname{Cotg} p \operatorname{Cos} 2\odot, \\ & - (1.22 + 0.53 \operatorname{Cotg} p \operatorname{Sin} a) \operatorname{Sin} 2\odot, \\ & - (15.39 + 6.68 \operatorname{Cotg} p \operatorname{Sin} a) \operatorname{Sin} \Omega, \\ & - (8.98 \operatorname{Cotg} p \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} \Omega, \end{aligned}$$

$$p' - p = - 20.0562 \operatorname{Cos} a.\, t,$$

$+ 20.255 \, \mathrm{Cos}\, p \, \mathrm{Sin}\, a \, \mathrm{Sin} \odot ,$

$+ 20.255 (\mathrm{tg}\, e \, \mathrm{Sin}\, p - \mathrm{Cos}\, p \, \mathrm{Sin}\, a) \, \mathrm{Cos}\, e \, \mathrm{Cos} \odot ,$

$+ 0.53 \, \mathrm{Cos}\, a \, \mathrm{Sin}\, 2 \odot ,$

$- 0.58 \, \mathrm{Sin}\, a \, \mathrm{Cos}\, 2 \odot ,$

$+ 6.68 \, \mathrm{Cos}\, a \, \mathrm{Sin}\, \Omega ,$

$- 8.98 \, \mathrm{Sin}\, a \, \mathrm{Cos}\, \Omega .$

Von diesen beyden Ausdrücken enthalten die zwey ersten Zeilen die Präcession für das Jahr 1835, die mit der Anzahl t der seit der Epoche der Tafeln verflossenen Jahre multiplicirt werden muss. Die zweyte und dritte Zeile enthält die Aberration, und die drey letzten die Nutation. Die Schiefe der Ecliptik für 1835 ist $e = 23° 27' 39''$.

Ex. Man suche den scheinbaren Ort von γ Pegasi für den 15. May 1827. Für diesen Tag ist die Länge der Sonne $\odot = 52° 53'$, und die des aufsteigenden Mondknotens $\Omega = 223° 53'$. Der Sternkatalog gibt für den Anfang des Jahres 1828 den mittleren Ort dieses Sterns

$$a = 1° 5' 52'' 50$$
$$p = 75° 46' 23''.90.$$

Hier ist $t = 1827.37 - 1828 = -0.63$. Man hat daher nach den vorhergehenden Gleichungen

	$a = 1° 5' 52'' 50$ . . .	$p = 75° 46' 23'' 90$
Präcession	-29.08	$+ \quad 12.63$
Von $\odot$ abhängig. Glieder	-13.05	$+ \quad 9.30$
Von Ω abhängig. Glieder	$+12.30$	$- \quad 4.50$
	$a' = 1° 5' 22''.67$	$p' = 75° 46' 41''.33$

und diese scheinbare Rectascension a′ und Poldistanz p′ hatte der Stern am 15. May 1827, daher auch der an diesem Tage beobachtete Ort desselben mit diesen Grössen a′ und p′ verglichen werden muss. (Eine Tafel dieser Reductionen für die vorzüglichsten Sterne findet man im VIII. Theile der Annalen der Sternwarte von Wien.)

Vorlesung IX.

Parallaxe.

1. §. Da wir die Gestirne von verschiedenen Puncten der Oberfläche der Erde beobachten, so ist es, zur Vergleichung dieser Beobachtungen, nothwendig, sie alle auf einen gemeinschaftlichen Punct, für welchen man den Mittelpunct der Erde gewählt hat, zu reduciren. Man nennt den Unterschied der Längen, Breiten . . . der Gestirne, wie sie aus einem Punct der Oberfläche und aus dem Mittelpuncte der Erde gesehen werden, die Parallaxe der Länge, Breite des Gestirns für den Ort des Beobachters.

Wir wollen die Erde als einen Körper annehmen, der durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist. Sey $2a$ die grosse, und $2b$ die kleine Axe dieser Ellipse und r die Entfernung des Beobachters von dem Mittelpuncte der Erde, φ der Winkel der r mit a und endlich φ' der Winkel der Normale des Ellipsoids in dem Orte des Beobachters mit a, also φ' die Polhöhe des Beobachtungsortes (S. 18) und φ die sogenannte geocentrische Polhöhe.

Man fälle ein Loth y von dem Beobachtungsorte senkrecht auf a, und nenne x das Stück der grossen Axe zwischen dem Mittelpuncte der Ellipse und dem Lothe y, so wie z das Stück der grossen Axe zwischen der Normale und demselben Lothe y, so hat man

$$z = \frac{b^2 x}{a^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \text{ und } \operatorname{tg} \varphi' = \frac{y}{z} = \frac{a^2 y}{b^2 x},$$

woraus folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi',$$

oder auch wenn $m = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ ist,

$$\varphi = \varphi' - m \operatorname{Sin} 2\varphi' + \frac{m^2}{2} \operatorname{Sin} 4\varphi' - \frac{m^3}{3} \operatorname{Sin} 6\varphi' +,$$

und durch diese Ausdrücke findet man φ aus der beobachteten Polhöhe φ'.

Weiter ist die bekannte Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder da man hat $y = \frac{b^2}{a^2} x \operatorname{tg} \varphi'$,

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi'}},$$

also auch $r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \varphi} . a^2$ oder endlich

$$r = a \sqrt{\frac{\operatorname{Cos} \varphi'}{\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} (\varphi' - \varphi)}} = \sqrt{\frac{a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi'}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi'}},$$

und durch diese Gleichung findet man die Entfernung r des Beobachters von dem Mittelpuncte der Erde.

Nach den neuesten Bestimmungen ist $a = 6376606$ und $b = 6356215$ Meter, also die Abplattung der Erde

$$\frac{a - b}{b} = \frac{1}{311.72}.$$ Ist also z. B.

φ	so findet man $\varphi - \varphi'$	$\log \frac{r}{a}$
40°	10′50″	9.999429
50	10 51	9.999[illegible]88
60	9 33	9.998959

I. Sey ρ die Entfernung des Gestirns von dem Mittelpuncte der Erde und ρ' von dem Beobachter auf der Oberfläche der Erde, und, wie zuvor, r die Entfernung des Beobachters selbst von dem Mittelpuncte der Erde. Nimmt man die Verhältnisse der drey Grössen a, r und ρ so an, dass man hat

$$\operatorname{Sin} \Pi = \frac{a}{\rho} \text{ und } \operatorname{Sin} \varpi = \frac{r}{\rho},$$

so ist, wie man sieht, Π der Winkel, unter welchem aus dem Mittelpuncte des Gestirns die halbe grosse Axe a der Erde gesehen wird, so wie ϖ die aus dem Gestirne gesehene scheinbare Grösse von r bezeichnet, vorausgesetzt, dass in

beyden Fällen das Gestirn in dem Horizonte des Beobachters steht. Man nennt Π die Horizontalparallaxe des Äquators, und ϖ die Horizontalparallaxe des Beobachters, und man hat $\text{Sin}\,\varpi = \frac{r}{a}\,\text{Sin}\,\Pi$.

II. Nennt man eben so Δ den Winkel, unter welchem der Halbmesser des Gestirns aus dem Mittelpuncte, und Δ' unter welchem er von dem Beobachter auf der Oberfläche der Erde gesehen wird, so ist $\rho\,\text{Sin}\,\Delta = \rho'\,\text{Sin}\,\Delta'$ oder

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\text{Sin}\,\Delta'}{\text{Sin}\,\Delta}.$$

2. §. Es werde nun, wie bey der Aberration, die wahre, oder geocentrische d. h. aus dem Mittelpuncte der Erde gesehene Lage des Gestirns durch die beyden Winkel a und b; die scheinbare oder von der Oberfläche der Erde gesehene Lage desselben aber durch a' u. b' und endlich die Lage des Beobachters gegen den Mittelpunct der Erde durch die analogen Winkel A und B gegeben, so hat man, wie dort, wenn man auf die in §. 1 gegebenen Gleichungen $\text{Sin}\,\varpi = \frac{r}{\rho}$ und $\frac{\text{Sin}\,\Delta'}{\text{Sin}\,\Delta} = \frac{\rho}{\rho'}$ Rücksicht nimmt, und N einen willkürlichen Winkel seyn lässt,

$$\frac{\text{Sin}\,b'\,\text{Cos}\,(a'-N)}{\text{Sin}\,\Delta'} - \frac{\text{Sin}\,b\,\text{Cos}\,(a-N)}{\text{Sin}\,\Delta} + \frac{\text{Sin}\,\varpi\,\text{Sin}\,B\,\text{Cos}\,(A-N)}{\text{Sin}\,\Delta} = 0,$$

$$\frac{\text{Sin}\,b'\,\text{Sin}\,(a'-N)}{\text{Sin}\,\Delta'} - \frac{\text{Sin}\,b\,\text{Sin}\,(a-N)}{\text{Sin}\,\Delta} + \frac{\text{Sin}\,\varpi\,\text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,(A-N)}{\text{Sin}\,\Delta} = 0,$$

$$\frac{\text{Cos}\,b'}{\text{Sin}\,\Delta'} - \frac{\text{Cos}\,b}{\text{Sin}\,\Delta} + \frac{\text{Sin}\,\varpi\,\text{Cos}\,B}{\text{Sin}\,\Delta} = 0,$$

und daraus werden sich nun, wie S. 82 alle hieher gehörenden Aufgaben auflösen lassen. Um Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir hier nur die vorzüglichsten dieser Auflösungen kurz anzeigen.

3. §. Ist $a = \omega$, $a' = \omega'$ das wahre und scheinbare Azimut und $b = z$, $b' = z'$ die wahre und scheinbare Zenithdistanz, so ist $B = \varphi' - \varphi$ und, da der Beobachter immer in

seinem Meridian steht, $A = 0$, und man hat, wenn man z. B. $N = 90°$ setzt

$$\text{Cotg}\,\omega' = \frac{\text{Sin}\,z\,\text{Cos}\,\omega - \text{Sin}\,\varpi\,\text{Sin}\,(\varphi' - \varphi)}{\text{Sin}\,z\,\text{Sin}\,\omega},$$

$$\text{Cotg}\,z' = \frac{(\text{Cos}\,z - \text{Sin}\,\varpi\,\text{Cos}\,(\varphi' - \varphi))\,\text{Sin}\,\omega'}{\text{Sin}\,z\,\text{Sin}\,\omega},$$

$$\text{Sin}\,\Delta' = \frac{\text{Sin}\,\Delta\,\text{Sin}\,\omega'\,\text{Sin}\,z'}{\text{Sin}\,z\,\text{Sin}\,\omega}.$$

Diese Gleichungen geben also ω' z' aus ω und z. Für $\varphi' - \varphi = 0$ d. h. für die kugelförmige Erde ist $\omega' = \omega$ oder die Parallaxe des Azimuts ist Null und

$\text{Cotg}\,z' = \frac{(\text{Cos}\,z - \text{Sin}\,\varpi)}{\text{Sin}\,z}$ oder annähernd, wenn ϖ nur klein ist, $z' - z = \varpi\,\text{Sin}\,z'$ und eben so $\Delta' = \Delta(1 + \text{Sin}\,\varpi\,\text{Cos}\,z)$.

I. Nach den drey letzten Gleichungen kann man z' nur aus $z\,\omega$ und ω' finden, und die Berechnung von Δ' setzt sowohl ω' als z' bekannt voraus. Man kann aber auch andere Ausdrücke finden, welche die scheinbaren Grössen ω' z' und Δ' bloss durch die wahren ω z und Δ geben. Wenn man nämlich die drey letzten Gleichungen des §. 2 quadrirt und addirt, so erhält man sofort

$$\text{Sin}\,\Delta' = \frac{\text{Sin}\,\Delta}{\sqrt{1 + \text{Sin}^2\,\varpi - 2\,\text{Sin}\,\varpi\,\text{Cos}\,\psi}},$$

wo $\text{Cos}\,\psi = \text{Cos}\,z\,\text{Cos}\,(\varphi' - \varphi) + \text{Sin}\,z\,\text{Sin}\,(\varphi' - \varphi)\,\text{Cos}\,\omega$ ist.

Kennt man eben so Δ', so findet man ω' und z' aus den Gleichungen

$$\text{Sin}\,z'\,\text{Cos}\,(\omega' - N) = \frac{\text{Sin}\,\Delta'}{\text{Sin}\,\Delta}(\text{Sin}\,z\,\text{Cos}\,(\omega - N)$$
$$- \text{Sin}\,\omega\,\text{Sin}\,(\varphi' - \varphi)\,\text{Cos}\,N),$$

$$\text{Sin}\,z'\,\text{Sin}\,(\omega' - N) = \frac{\text{Sin}\,\Delta'}{\text{Sin}\,\Delta}(\text{Sin}\,z\,\text{Sin}\,(\omega - N)$$
$$+ \text{Sin}\,\varpi\,\text{Sin}\,(\varphi' - \varphi)\,\text{Sin}\,N).$$

II. Das Verfahren in I führt gleichsam von selbst auf die Auflösung der umgekehrten Aufgabe. Ist nämlich aus den unmittelbaren Beobachtungen die Grösse ω' und z' und Δ' und überdiess (da ρ' nicht beobachtet werden kann) aus den Tafeln die Grösse $\rho = \frac{r}{\text{Sin}\,\varpi}$ bekannt, so findet man die Grössen ω, z und Δ auf folgende Art:

Die Summe der Quadrate der drey letzten Gleichungen in §. 2 gibt auch

$$\rho^2 = \rho'^2 + r^2 + 2\rho' r \operatorname{Cos}\psi',$$

wenn $\operatorname{Cos}\psi' = \operatorname{Cos} z' \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi) + \operatorname{Sin} z' \operatorname{Sin}(\varphi' - \varphi) \operatorname{Cos}\omega'$ ist.

Löst man diese in Beziehung auf ρ' quadratische Gleichung auf, so ist

$$\frac{\rho'}{\rho} = \sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2\varpi \operatorname{Sin}^2\psi'} - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\psi' \text{ und}$$

$$\frac{r}{\rho'} = \frac{\operatorname{Sin}\varpi \sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2\varpi \operatorname{Sin}^2\psi'} + \operatorname{Sin}^2\varpi \operatorname{Cos}\psi',}{\operatorname{Cos}^2\varpi},$$

wodurch also die Verhältnisse $\frac{\rho'}{\rho}$ und $\frac{r}{\rho'}$ gegeben werden.

Setzt man dann, analog mit dem Vorhergehenden

$\frac{r}{\rho'} = \operatorname{Sin}\varpi'$, so erhält man

$$\operatorname{tg}(\omega - N) = \frac{\operatorname{Sin} z' \operatorname{Sin}(\omega' - N) - \operatorname{Sin}\varpi' \operatorname{Sin}(\varphi' - \varphi) \operatorname{Sin} N}{\operatorname{Sin} z' \operatorname{Cos}(\omega' - N) + \operatorname{Sin}\varpi' \operatorname{Sin}(\varphi' - \varphi) \operatorname{Cos} N},$$

$$\operatorname{Cotg} z = \frac{(\operatorname{Cos} z' + \operatorname{Sin}\varpi' \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi)) \operatorname{Cos}(\omega - N)}{\operatorname{Sin} z' \operatorname{Cos}(\omega' - N) + \operatorname{Sin}\varpi' \operatorname{Sin}(\varphi' - \varphi) \operatorname{Cos} N} \text{ und}$$

$$\operatorname{Sin}\Delta = \frac{\rho'}{\rho} \operatorname{Sin}\Delta' = \frac{\operatorname{Cos} z - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi)}{\operatorname{Cos} z'} . \operatorname{Sin}\Delta'$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} z}{\operatorname{Cos} z' + \operatorname{Sin}\varpi' \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi)} . \operatorname{Sin}\Delta'$$

Ex. Sey $\omega = 80°$, $z = 60$, $\varpi = 5°$ und $\Delta = 3°$ gegeben, und die angenommene sehr starke Differenz der beyden Polhöhen $\varphi' - \varphi = 1°$. Nimmt man die beobachtete Polhöhe $\varphi' = 50°$, so ist die Abplattung $\frac{a - b}{a} = \frac{1}{56.08}$ und daher

$$r = 0.9899 \text{ und } \rho = 11.358.$$

Mit diesen gegebenen Werthen von $\omega, z, \varpi, \varphi' - \varphi$ und Δ. findet man nach den ersten Gleichungen des §. 3

scheinbares Azimut	$\omega' =$	80°	5′	57″.0
- - Zenithdistanz	$z' =$	64	30	17 .5
- - Halbmesser	$\Delta' =$	5	7	40 .3

Nimmt man aber diese scheinbaren Grössen ω', z', Δ' als gegeben an, so findet man nach §. 3 II

$$\psi' = 64° 20' 13''$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = 0.959164 \text{ und damit}$$

$$\omega = 79^\circ 59' 59''.86$$
$$z = 60^\circ \; 0' \; 0''.08$$
$$\triangle = \;\; 3^\circ \; 0' \; 0'' \quad \text{wie zuvor.}$$

III. Da aber für alle uns bekannten Gestirne die Grösse ϖ nur klein ist, und da sie selbst bey dem Monde, dem uns nächsten Himmelskörper, nur 1° 1′ 32″ betragen kann, so wird es vortheilhaft seyn, die vorhergehenden Probleme durch Reihen aufzulösen, die nach Potenzen von ϖ fortgehen.

Aus den Gleichungen des §. 2 folgt

$$\operatorname{tg}(\omega' - \omega) = \frac{\operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Sin}(\varphi' - \varphi) \operatorname{Sin}\omega}{\operatorname{Sin} z - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Sin}(\varphi' - \varphi) \operatorname{Cos}\omega}.$$

Wenden wir darauf das bey der Lehre der Aberration S. 83 gegebene Verfahren an, so hat man

$$\omega' - \omega = P \operatorname{Sin}\omega + \tfrac{1}{2} P^2 \operatorname{Sin} 2\omega + \tfrac{1}{3} P^3 \operatorname{Sin} 3\omega + \ldots.$$
$$\text{wo } P = \frac{\operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Sin}(\varphi' - \varphi)}{\operatorname{Sin} z} \text{ ist.}$$

Eben so geben die allgemeinen Gleichungen des §. 3, wenn man $N = \frac{\omega' + \omega}{2}$ setzt,

$$\operatorname{Cotg} z' = \frac{(\operatorname{Cos} z - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi)) \operatorname{Cos}\frac{\omega' - \omega}{2}}{\operatorname{Sin} z \operatorname{Cos}\frac{\omega' - \omega}{2} - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Sin}(\varphi' - \varphi) \operatorname{Cos}\frac{\omega' + \omega}{2}}.$$

Sucht man daraus $\operatorname{tg}(z - z') = \frac{\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z'}{1 + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} z'}$, so erhält man

$$\operatorname{tg}(z - z') = \frac{\frac{\operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi)}{\operatorname{Sin}\psi} \operatorname{Cos}(z + \psi)}{1 - \frac{\operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi)}{\operatorname{Sin}\varphi} \operatorname{Sin}(z + \psi)}$$

wenn man der Kürze wegen setzt

$$\operatorname{g}\psi = \frac{\operatorname{Cos}\frac{\omega' - \omega}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{\omega' + \omega}{2}} \operatorname{Cotg}(\varphi' - \varphi),$$

Vergleicht man diesen Ausdruck von $\operatorname{tg}(z - z')$ mit den in S. 83 gegebenen Gleichungen, so erhält man

$$z - z' = Q \operatorname{Cos}(z+\psi) + \tfrac{1}{2} Q^2 \operatorname{Sin} 2(z+\psi) - \tfrac{1}{3} Q^3 \operatorname{Cos} 3(z+\psi) - \tfrac{1}{4} Q^4 \operatorname{Sin} 4(z+\psi) + ,$$

$$\text{wo } Q = \frac{\operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi)}{\operatorname{Sin}\psi} \text{ ist.}$$

Kennt man so ω' und z' durch Hülfe der beyden vorhergehenden Reihen, so hat man auch Δ' aus

$$\operatorname{Sin}\Delta' = \operatorname{Sin}\Delta \frac{\operatorname{Sin}\omega' \operatorname{Cos} z'}{\operatorname{Sin}\omega \operatorname{Cos} z}.$$

Ähnliche Reihen könnte man auch für die umgekehrte Aufgabe finden, bey der wir uns aber hier nicht länger aufhalten wollen.

4. §. Ist in den Gleichungen des §. 2 $a = a$, $a' = a'$ die wahre und scheinbare Rectascension des Gestirns, und $b = p$, $b' = p'$ die wahre und scheinbare Poldistanz desselben, so ist die Poldistanz des Beobachters $B = 90 - \varphi$ und dessen Rectascension $A = t$, wo t die Sternzeit der Beobachtung ist.

Setzt man dann $N = 0$, so ist

$$\operatorname{tg} a' = \frac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} a - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} a - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} t},$$

$$\operatorname{Cotg} p' = \frac{(\operatorname{Cos} p - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Sin}\varphi) \operatorname{Cos} a'}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} a - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} t},$$

$$\operatorname{Sin}\Delta' = \frac{\operatorname{Sin}\Delta \operatorname{Sin} p' \operatorname{Cos} a'}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} a - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} t}.$$

Setzt man aber $N = t - 90°$, so hat man

$$\operatorname{Cotg}(t - a') = \frac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos}(t-a) - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin}(t-a)},$$

$$\operatorname{Cotg} p' = \frac{(\operatorname{Cos} p - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\varphi) \operatorname{Sin}(t - a')}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin}(t-a)},$$

$$\operatorname{Sin}\Delta' = \frac{\operatorname{Sin}\Delta \operatorname{Sin} p' \operatorname{Sin}(t - a')}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin}(t-a)}.$$

I. Auch hat man unmittelbar

$$\operatorname{Sin}\Delta' = \frac{\operatorname{Sin}\Delta}{\sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2\varpi - 2 \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\psi}},$$

wo $\operatorname{Cos}\psi = \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}(a - t) + \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin}\varphi$ ist, und dann ist

$$\operatorname{Sin} p' \operatorname{Cos}(a'-N) = \frac{\operatorname{Sin}\Delta'}{\operatorname{Sin}\Delta}[\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos}(a-N)$$
$$-\operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}(t-N)],$$

$$\operatorname{Sin} p' \operatorname{Sin}(a'-N) = \frac{\operatorname{Sin}\Delta'}{\operatorname{Sin}\Delta}[\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin}(a-N)$$
$$-\operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(t-N)],$$

wo N eine willkürliche Grösse bezeichnet.

II. Für die Auflösung derselben Aufgabe durch Reihen endlich hat man

$$a'-a = P \operatorname{Sin}(a-t) + \tfrac{1}{2}P^2 \operatorname{Sin} 2(a-t) + \tfrac{1}{3}P^3 \operatorname{Sin} 3(a-t) +$$

$$p-p' = Q \operatorname{Cos}(p+\psi) + \frac{Q^2}{2} \operatorname{Sin} 2(p+\psi)$$
$$-\tfrac{1}{3}Q^3 \operatorname{Cos}(p+\psi) - \tfrac{1}{4}Q^4 \operatorname{Sin} 4(p+\psi) + +,$$

wo $P = \dfrac{\operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin} p}$,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{Cos}\dfrac{a'-a}{2}}{\operatorname{Cos}\left(t-\dfrac{a'+a}{2}\right)} . \operatorname{tg}\varphi \text{ und } Q = \frac{\operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}\psi} \text{ ist,}$$

oder endlich, wenn man bey der ersten Potenz von ϖ stehen bleibt,

$$a'-a = \frac{\varpi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(a-t)}{\operatorname{Sin} p} \text{ und}$$

$$p'-p = \varpi(\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}(t-a)$$

5. §. Ist in den allgemeinen Gleichungen des §. 2 $a=\lambda$, $a'=\lambda'$ die wahre und scheinbare Länge, und $b=\pi$, $b'=\pi'$ die wahre und scheinbare Distanz des Gestirns vom Pole der Ecliptik, so sey auch $A=L$ und $B=B$ die Länge und Poldistanz des Zeniths oder des Punctes des Himmels, nach welchem die verlängerte Distanz r des Beobachters von dem Mittelpuncte der Erde gerichtet ist. Setzt man dann $N=o$, so erhält man

$$\operatorname{tg}\lambda' = \frac{\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\lambda - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} L}{\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\lambda - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} L},$$

$$\operatorname{Cotg}\pi' = \frac{(\operatorname{Cos}\pi - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Cos} B)\operatorname{Cos}\lambda'}{\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\lambda - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} L},$$

$$\operatorname{Sin}\Delta' = \frac{\operatorname{Sin}\Delta \operatorname{Sin}\pi' \operatorname{Cos}\lambda'}{\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\lambda - \operatorname{Sin}\varpi \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} L}.$$

Setzt man aber $N = L - 90$, so ist

$$\mathrm{Cotg}\,(L - \lambda') = \frac{\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,(L - \lambda) - \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,B}{\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,(L - \lambda)},$$

$$\mathrm{Cotg}\,\pi' = \frac{(\mathrm{Cos}\,\pi - \mathrm{Sin}\,\varpi\,\mathrm{Cos}\,B)\,\mathrm{Sin}\,(L - \lambda')}{\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,(L - \lambda)},$$

$$\mathrm{Sin}\,\Delta' = \frac{\mathrm{Sin}\,\triangle\,\mathrm{Sin}\,\pi'\,\mathrm{Sin}\,(L - \lambda')}{\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,(L - \lambda)} \text{ u. s. w.}$$

I. Auch hat man unmittelbar

$$\mathrm{Sin}\,\Delta' = \frac{\mathrm{Sin}\,\triangle}{\sqrt{1 + \mathrm{Sin}^2\varpi - 2\,\mathrm{Sin}\,\varpi\,\mathrm{Cos}\,\psi}},$$

wo $\mathrm{Cos}\,\psi = \mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Cos}\,(\lambda - L) + \mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,B$ ist, und dann

$$\mathrm{Sin}\,\pi'\,\mathrm{Cos}\,(\lambda' - N) = \frac{\mathrm{Sin}\,\triangle'}{\mathrm{Sin}\,\triangle}[\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,(\lambda - N) - \mathrm{Sin}\,\varpi\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Cos}\,(L - N)],$$

$$\mathrm{Sin}\,\pi'\,\mathrm{Sin}\,(\lambda' - N) = \frac{\mathrm{Sin}\,\triangle'}{\mathrm{Sin}\,\triangle}[\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,(\lambda - N) - \mathrm{Sin}\,\varpi\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,(L - N)].$$

II. Für die Auflösung dieser Aufgaben durch Reihen aber ist

$$\lambda' - \lambda = P\,\mathrm{Sin}\,(\lambda - L) + \tfrac{1}{2}P^2\,\mathrm{Sin}\,2\,(\lambda - L) + \tfrac{1}{3}P^3\,\mathrm{Sin}\,3\,(\lambda - L) + \ldots$$

$$\pi - \pi' = Q\,\mathrm{Cos}\,(\pi + \psi) + \tfrac{1}{2}Q^2\,\mathrm{Sin}\,2\,(\pi + \psi) - \tfrac{1}{3}Q^3\,\mathrm{Cos}\,3\,(\pi + \psi) - \tfrac{1}{4}Q^4\,\mathrm{Sin}\,4\,(\pi + \psi) + \ldots$$

$$\text{wo } P = \frac{\mathrm{Sin}\,\varpi\,\mathrm{Sin}\,B}{\mathrm{Sin}\,\pi},$$

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{\lambda' - \lambda}{2}}{\mathrm{Cos}\,(L - \frac{\lambda' + \lambda}{2})}\,.\,\mathrm{Cotg}\,B \text{ und } Q = \frac{\mathrm{Sin}\,\varpi\,\mathrm{Cos}\,B}{\mathrm{Sin}\,\psi} \text{ ist},$$

oder, wenn man bey der ersten Potenz von ϖ stehen bleibt,

$$\lambda' - \lambda = \frac{\varpi\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,(\lambda - L)}{\mathrm{Sin}\,\pi} \text{ und}$$

$$\pi' - \pi = \varpi\,(\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,B - \mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Cos}\,(\lambda - L)).$$

III. Die Länge L und Poldistanz B des Zeniths findet man (nach S. 30) aus den Ausdrücken

$$\operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} L = \operatorname{Cos} t \operatorname{Cos} \varphi$$
$$\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} L = \operatorname{Sin} t \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} e + \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} e$$
$$\operatorname{Cos} B = - \operatorname{Sin} t \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} e + \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} e,$$

wo e die Schiefe der Ecliptik bezeichnet. Zur Rechnung bequemer sind folgende Gleichungen (S. 29)

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{Sin} t \operatorname{Cotg} \varphi$$
$$\operatorname{tg} L = \frac{\operatorname{Sin}(m+e)}{\operatorname{Sin} m} \operatorname{tg} t,$$
$$\operatorname{Cos} B = \frac{\operatorname{Cos}(m+e)}{\operatorname{Cos} m} \operatorname{Sin} \varphi.$$

IV. Auch kann man die Berechnung der Grössen L und B ganz übergehen. Substituirt man nämlich die Werthe von Sin B Cos L, Sin B Sin L und Cos B aus III in den drey ersten Gleichungen des §. 5, so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{Cotg} \varphi \operatorname{Sin} t \text{ setzt,}$$
$$\operatorname{tg} \lambda' = \frac{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \lambda - \operatorname{Sin} \varpi \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin}(e+x) \operatorname{Sec} x}{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \lambda - \operatorname{Sin} \varpi \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} t},$$
$$\operatorname{Cotg} \pi' = \frac{[\operatorname{Cos} \pi - \operatorname{Sin} \varpi \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos}(e+x) \operatorname{Sec} x] \operatorname{Cos} \lambda'}{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \lambda - \operatorname{Sin} \varpi \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} t},$$
$$\operatorname{Sin} \Delta' = \frac{\operatorname{Sin} \Delta \operatorname{Cos} \lambda' \operatorname{Sin} \pi'}{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \lambda - \operatorname{Sin} \varpi \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} t}.$$

Verwandelt man in diesen drey Gleichungen die Grössen λ, π und e in a, p und o, so erhält man die drey ersten Gleichungen des §. 4; und verwandelt man die Grössen λ und π in $90 - \omega$ und z, und setzt überdiess $t = 90°$ und $90 + e = \varphi'$ so erhält man die drey ersten Gleichungen des §. 3

Ex. Sey $\lambda = 181° 46' 22''.5$, $\pi = 87° 42' 33''.8$ $\varpi = 0° 59' 27''.7$, $e = 23° 28' 0''.8$, $\Delta = 0° 16' 15''.5$ und $t = 209° 46' 7''.9$, $\varphi = 49° 53' 43''.9$ gegeben, so findet man nach den drey letzten Gleichungen

$$\lambda' = 181° 48' 5''.4, \quad \pi' = 88° 30' 58''.7 \text{ und } \Delta' = 0° 16' 25''.5$$

6. §. Endlich kann man auch aus der wahren Lage λ, π des Gestirns gegen die Ecliptik unmittelbar die scheinbare Lage a′, p′ desselben gegen den Äquator ableiten. Da diese Ausdrücke in der Anwendung oft nützlich sind, so wollen wir sie zum Beschlusse dieses Gegenstandes aufsuchen.

Aus den drey senkrechten Coordinaten

$$X = \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \lambda, \quad Y = \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \lambda, \quad Z = \rho \operatorname{Cos} \pi,$$

welche die Lage des Gestirns gegen den Mittelpunct der Erde in Beziehung auf die Ecliptik bestimmen, wird man die Coordinaten X′ Y′ Z′, welche die Lage des Gestirns gegen den Mittelpunct der Erde in Beziehung auf den Äquator bestimmen, durch die Gleichungen finden

$$X' = X$$
$$Y' = Y \operatorname{Cos} e - Z \operatorname{Sin} e$$
$$Z' = Z \operatorname{Cos} e + Y \operatorname{Sin} e.$$

Die Lage des Beobachters gegen den Mittelpunct der Erde aber wird, ebenfalls in Beziehung auf den Äquator, durch die den X′ Y′ Z′ parallelen Coordinaten bestimmt.

$$x = r \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} t, \quad y = r \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} t, \quad z = r \operatorname{Sin} \varphi$$

und daraus folgt unmittelbar für die Bestimmung der scheinbaren Grössen a′ p′ und ρ' oder Δ'

$$X' - x = \rho' \operatorname{Sin} p' \operatorname{Cos} a'$$
$$Y' - y = \rho' \operatorname{Sin} p' \operatorname{Sin} a'$$
$$Z' - z = \rho' \operatorname{Cos} p'.$$

Setzt man also der Kürze wegen $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \pi \operatorname{Sin} \lambda$, so erhält man

$$\operatorname{tg} a' = \frac{\operatorname{Cos} \pi \operatorname{Sin} (u - e) \operatorname{Sec} u - \operatorname{Sin} \varpi \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \lambda - \operatorname{Sin} \varpi \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} t},$$

$$\operatorname{Cotg} p' = \frac{[\operatorname{Cos} \pi \operatorname{Cos} (u - e) \operatorname{Sec} u - \operatorname{Sin} \varpi \operatorname{Sin} \varphi] \operatorname{Cos} a'}{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \lambda - \operatorname{Sin} \varpi \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cot} t},$$

$$\operatorname{Sin} \Delta' = \frac{\operatorname{Sin} \Delta \,.\, \operatorname{Cos} a' \operatorname{Sin} p'}{\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \lambda - \operatorname{Sin} \varpi \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} t}.$$

Ex. Ist $\lambda = 93° 37' 26''$, $\pi = 88° 59' 31''$, $\varpi = 1° 0' 43''$, $e = 23° 27' 59''$, $\Delta = 0° 33' 12''$, $t = 183° 17' 51''$ und $\varphi = 49° 53' 44''$ gegeben, so findet man durch die drey letzten Gleichungen

$a' = 93° 15' 51''$, $p' = 66° 16' 54''$ und $\Delta' = 0° 33' 24''$.

Vorlesung X.

Refraction.

1. §. Wenn man die die Erde umgebende Atmosphäre als aus concentrischen Schichten bestehend annimmt, deren Dichte nach einem gewissen Gesetze veränderlich ist, so wird ein Lichtstrahl, wenn er einer dieser Schichten sehr nahe kömmt, von derselben in einer Richtung angezogen werden, welche auf der Oberfläche dieser Schichte in dem Puncte, in welchem das Licht der Schichte begegnet, senkrecht steht, wenn die Wirkung der Körper auf das Licht nur in sehr kleinen Entfernungen merkbar ist. Sind also x und y die senkrechten Coordinaten eines Lichtpunctes, wodurch die Entfernung desselben von einer jener atmosphärischen Schichten ausgedrückt wird, und nimmt man die Axe der x parallel mit der die Schichte in dem Einfallspuncte berührenden Ebene und die Ebene der x y als diejenige an, welche durch die Normale der Schichte in dem Berührungspuncte und durch die Richtung des Lichtstrahls geht, so hat man, nach den ersten Gründen der Mechanik, die Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = P,$$

wo P die Kraft bezeichnet, mit welcher das Licht in der Richtung der y von der Schiefe angezogen wird, und wo dt das Element der Zeit ist. Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch dx und die zweyte durch dy, so gibt die Summe ihre Integrale

$$\frac{d x^2 + d y^2}{d t^2} = 2 \int P\, d y + \text{Constant}.$$

wo die Constante die Geschwindigkeit des Lichtes in der Entfernung von der Schichte ausdrückt, in welcher die Wirkung der Schichte auf das Licht noch nicht angefangen hat, oder für welche $t = o$ ist. Nennt man also c die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raume und v die Geschwindigkeit desselben in irgend einem Puncte der Atmosphäre, so geht die letzte Gleichung in folgende über

$$v^2 = c^2 + 2\int P\,dy.$$

Das Integral $\int P dy$ wird irgend eine Function der Dichte ρ der Luft seyn, daher wir dieses Integral durch $2 k \rho$ vorstellen wollen, wo k ein noch zu bestimmender Factor ist, so dass man hat

$$v^2 = c^2 + 4 k \rho.$$

Ist nun u das Loth aus dem Mittelpuncte der Erde auf die Tangente der Curve, welche der Lichtpunct in der Atmosphäre beschreibt, so hat man, da sich bekanntlich bey allen Bewegungen durch Centralkräfte die Geschwindigkeiten verkehrt, wie die Lothe aus dem Centralpuncte auf die Tangente der Bahn verhalten

$$u = \frac{S}{v} \text{ oder } u = \frac{S}{\sqrt{c^2 + 4 k \rho}},$$

wo S eine Constante bezeichnet. Um diese Constante zu bestimmen, sey z die scheinbare oder beobachtete Zenithdistanz des Sterns und a der Halbmesser der Erde, so ist, wenn der Lichtstrahl die Erde berührt, $u' = a \operatorname{Sin} z$ und zugleich, wenn die Dichte der Atmosphäre an der Oberfläche der Erde gleich der Einheit gesetzt wird, $u' = \frac{S}{\sqrt{c^2 + 4 k}}$.

Setzt man beyde Ausdrücke von u′ gleich, und nimmt man auch den Halbmesser der Erde für die Einheit der Entfernungen an, so ist

$S = \operatorname{Sin} z \,.\, \sqrt{c^2 + 4 k}$ und daher die vorhergehende Gleichung

$$u = \frac{\operatorname{Sin} z \,.\, \sqrt{1 + \frac{4k}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{4k\rho}{c^2}}}.$$

Nennt man aber dr den Winkel, welchen zwey nächste Tangenten der Curve unter sich bilden, so hat man

$$dr = \frac{du}{\sqrt{(1+x)^2 - u^2}},$$

wo $(1+x)$ die Entfernung des Punctes der Curve von dem Mittelpuncte der Erde, und dr das Element der Krümmung jener Curve, also auch das Element der gesuchten Refraction r bezeichnet. Substituirt man in der letzten Gleichung den vorhergehenden Werth von u, so hat man, da

$$du = -\frac{2ku\,d\rho}{c^2\left(1+\frac{4k\rho}{c^2}\right)} \text{ ist,}$$

$$dr = \frac{-\frac{2k}{c^2}\,d\rho \operatorname{Sin} z.\sqrt{1+\frac{4k}{c^2}}}{\left(1+\frac{4k\rho}{c^2}\right)\cdot\sqrt{(1+x)^2\left(1+\frac{4k\rho}{c^2}\right)-\left(1+\frac{4k}{c^2}\right)\operatorname{Sin}^2 z}},$$

und das Integral dieses Ausdruckes wird die gesuchte Refraction r geben.

I. Um diese Gleichung leichter zu integriren, sey $\frac{1}{1+x} = 1 - s$ und $\frac{2k}{c^2+4k} = \alpha$ oder $\frac{4k}{c^2} = \frac{2\alpha}{1-2\alpha}$, so hat man

$$dr = \frac{-\frac{\alpha}{1-2\alpha}\,d\rho \operatorname{Sin} z.\sqrt{1+\frac{2\alpha}{1-2\alpha}}}{\left(1+\frac{2\alpha\rho}{1-2\alpha}\right)\sqrt{\frac{1}{(1-s)^2}\left(1+\frac{2\alpha\rho}{1-2\alpha}\right)-\left(1+\frac{2\alpha}{1-2\alpha}\right)\operatorname{Sin}^2 z}}$$

oder wenn man Zähler und Nenner durch $(1-s)(1-2\alpha)^{\frac{3}{2}}$ multiplicirt

$$dr = \frac{-\alpha\,d\rho\,(1-s)\operatorname{Sin} z}{(1-2\alpha+2\alpha\rho)\sqrt{1-2\alpha+2\alpha\rho-(1-s)^2\operatorname{Sin}^2 z}}.$$

Da aber die Grösse α gegen die Einheit sehr klein ist (man hat nach den Beobachtungen nahe $\alpha = 0.00029$), so ist von $(1-2\alpha+\alpha 2\rho)$ der grösste Werth gleich 1 für $\rho = 1$ und eben so der kleinste Werth gleich $1-2\alpha$ für $\rho = 0$, so dass man statt dieser Grösse $(1-2\alpha+2\alpha\rho)$ ohne merklichen Fehler das Mittel aus jenen beyden äussersten Wer-

then, oder die Grösse $(1-\alpha)$ nehmen kann. Da endlich auch s gegen die Einheit sehr klein ist, so wird man die Grössen αs und s^2 vernachlässigen können, und daher statt der letzten Gleichung die folgende erhalten

$$dr = \frac{-\frac{\alpha}{1-\alpha} d\rho \operatorname{Sin} z}{\sqrt{1-2\alpha+2\alpha\rho-(1-2s)\operatorname{Sin}^2 z}} \text{ oder endlich}$$

$$dr = \frac{-\frac{\alpha}{1-\alpha} d\rho \operatorname{Sin} z}{\sqrt{2s-2\alpha(1-\rho)+(1-2s)\operatorname{Cos}^2 z}}.$$

2. §. Um diesen Ausdruck zu integriren, muss man zuerst die Abhängigkeit der Grössen ρ und s oder man muss das Gesetz kennen, nach welchem die Dichte der Atmosphäre von der Höhe derselben über der Erde abhängt. Allein dieses Gesetz ist noch unbekannt. Nehmen wir indessen an $s=\beta(1-\rho)$, wo β eine constante Grösse bezeichnen soll, so wird die letzte Gleichung

$$dr = \frac{-\frac{\alpha d\rho}{1-\alpha} \operatorname{Sin} z}{\sqrt{2\beta(1-\rho)-2\alpha(1-\rho)+[1-2\beta(1-\rho)]\operatorname{Cos}^2 z}} \text{ oder}$$

$$dr = \frac{-\frac{\alpha d\rho}{1-\alpha} \operatorname{Sin} z}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 z+[2\beta \operatorname{Sin}^2 z-2\alpha](1-\rho)}}.$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach der bekannten Formel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A-Bx}} = -\frac{2}{B}\sqrt{A-Bx},$$

so erhält man

$$r = \text{Const} + \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\operatorname{Sin} z}{\beta \operatorname{Sin}^2 z-\alpha} . \sqrt{\operatorname{Cos}^2 z+2\beta \operatorname{Sin}^2 z-2\alpha-(2\beta \operatorname{Sin}^2 z-2\alpha)\rho}.$$

Nimmt man dieses Integral zwischen den beyden Grenzen $\rho=0$ und $\rho=1$, so erhält man

$$r = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\operatorname{Sin} z}{\beta \operatorname{Sin}^2 z-\alpha}\left(\sqrt{\operatorname{Cos}^2 z+2\beta \operatorname{Sin}^2 z-2\alpha}-\operatorname{Cos} z\right) \text{ oder}$$

$$r = \frac{\frac{2\alpha}{1-\alpha}\,\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Cos}\,z + \sqrt{\mathrm{Cos}^2 z + 2\beta\,\mathrm{Sin}^2 z - 2\alpha}} \text{ oder endlich}$$

$$r = \frac{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,1''}\,\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Cos}\,z + \sqrt{2(\beta-\alpha) + (1-2\beta)\,\mathrm{Cos}^2 z}}.$$

Da nach den Beobachtungen die Grösse β nur klein und nahe gleich 0.002 ist, so ist $1-2\beta = 0.996$ oder nahe gleich der Einheit, und wir werden daher in dem Nenner des letzten Ausdruckes um so mehr $(1-2\beta)\,\mathrm{Cos}^2 z = \mathrm{Cos}^2 z$ setzen können, da für grössere Zenithdistanzen der Einfluss dieses Gliedes nur sehr klein ist. Man hat sonach für die gesuchte Refraction r den Ausdruck

$$r = \frac{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,1''}\,\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Cos}\,z + \sqrt{2(\beta-\alpha) + \mathrm{Cos}^2 z}} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

Nimmt man nach den neuesten Bestimmungen die Grössen $\alpha = 0.00029128$ und $\beta = 0.00229128$, so ist

$$r = \frac{120''.\,2\,\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Cos}\,z + \sqrt{0.004 + \mathrm{Cos}^2 z}}. \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}')$$

Um diesem Ausdrucke eine zur Rechnung bequemere Gestalt zu geben, sey $\mathrm{tang}\,\psi = \frac{\sqrt{0.004}}{\mathrm{Cos}\,z}$, so ist

$$r = \frac{120''.\,2}{\sqrt{0.004}}\,\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{tang}\,\frac{\psi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}'')$$

und nach dieser letzten Gleichung ist die Tafel XIX von $z = 0$ bis $z = 85°$ berechnet worden.

3. §. Die letzte Gleichung der S. 103, die wir so eben unter der Voraussetzung $s = \beta\,(1-\rho)$ integrirt haben, lässt sich auch noch in dem Falle integriren, wenn man zwischen s und ρ die Bedingungsgleichung aufstellt

$$1 - s = [1 - 2\alpha(1-\rho)]^m,$$

wo m eine willkürliche Grösse ist. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$[1 - 2\alpha(1-\rho)]^{\frac{2m-1}{2}}.\,\mathrm{Sin}\,z = \omega,$$

so geht jene Gleichung in folgende über

$$dr = \frac{-d\omega}{(2m-1)\sqrt{1-\omega^2}}.$$

Integrirt man diesen Ausdruck von $\rho = 0$ bis $\rho = 1$, das heisst, von $\omega = \text{Sin}\, z$ bis

$$\omega = \frac{\text{Sin}\, z}{\left(1+\frac{2\alpha}{1-2\alpha}\right)^{\frac{2m-1}{2}}} = (1-2\alpha)^{\frac{2m-1}{2}}.\ \text{Sin}\, z,$$

so erhält man

$$r = \frac{1}{2m-1}\left(z - \text{Arc Sin}\left[(1-2\alpha)^{\frac{2m-1}{2}}.\text{Sin}\, z\right]\right) \text{ oder}$$

$$\text{Sin}\,[z-(2m-1)r] = (1-2\alpha)^{\frac{2m-1}{2}}.\ \text{Sin}\, z,$$

wofür man der Kürze wegen setzen kann

$$M\,\text{Sin}\, z = \text{Sin}\,(z - Nr) \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

wo M und N constante Grössen sind. Diese Form (II) der Refraction hat zuerst Simpson gefunden. Sie gibt

$$\text{Sin}\, z : \text{Sin}\,(z-Nr) = 1 : M \text{ oder}$$

$$\text{Sin}\, z + \text{Sin}\,(z-Nr) : \text{Sin}\, z - \text{Sin}\,(z-Nr) = 1+M : 1-M$$

oder

$$\text{tg}\, \frac{N}{2}\, r = \frac{1-M}{1+M}\, \text{tg}\left(z - \frac{N}{2}\, r\right) \quad . \quad . \quad . \quad (III),$$

welches die von Bradley aufgestellte Form ist, die sich auch auf die Gestalt $r = A\,\text{tg}\, z - B\,\text{tg}^3 z + C\,\text{tg}^5 z -$ bringen lässt.

I. Auch lassen sich die Gleichungen (II) oder (III) durch eine einfache Transformation auf die Gleichung (I) zurückführen. Die Gleichung (II) gibt nämlich

$$M\,\text{Sin}\, z = \text{Sin}\, z\, \text{Cos}\, Nr - \text{Cos}\, z\, \text{Sin}\, Nr.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $\text{Sin}\, Nr = Nr\, \text{Sin}\, 1''$ und $\text{Cos}\, Nr = 1 - \frac{1}{2} N^2 r^2\, \text{Sin}^2\, 1$, so erhält man für r eine quadratische Gleichung, und daraus

$$Nr\,\text{Sin}\, 1'' = \frac{-\text{Cos}\, z + \sqrt{2(1-M)\,\text{Sin}^2 z + \text{Cos}^2 z}}{\text{Sin}\, z},$$

oder wenn man diesen Ausdruck durch

$\text{Cos}\, z + \sqrt{2(1-M)\,\text{Sin}^2 z + \text{Cos}^2 z}$ multiplicirt und dividirt,

$$r = \frac{\frac{2(1-M)\,\mathrm{Sin}\,z}{N\,\mathrm{Sin}\,1''}}{\mathrm{Cos}\,z + \sqrt{2(1-M)\,\mathrm{Sin}^2 z + \mathrm{Cos}^2 z}}$$

oder da M nahe gleich der Einheit ist, annähernd wie zuvor

$$r = \frac{\frac{2(1-M)\,\mathrm{Sin}\,z}{N\,\mathrm{Sin}\,1''}}{\mathrm{Cos}\,z + \sqrt{2(1-M) + \mathrm{Cos}^2 z}}$$

welches wieder die Form (I) ist. Setzt man

$\frac{2(1-M)}{N\,\mathrm{Sin}\,1''} = 120''.2$ und $2(1-M) = 0.004$, so findet man

$$M = 0.998 \text{ und } N = 6.864052,$$

und mit diesen Werthen von M und N geben also die Gleichungen (II) oder (III) ebenfalls die Zahlen der Tafel XIX von $z = 0$ bis $z = 85°$.

4. §. Diese Werthe von α und β oder M und N, also auch die daraus abgeleiteten Zahlen der Tafel beziehen sich auf einen bestimmten Zustand der Atmosphäre, für welchen das Barometer 28 Par. Zolle und das Quecksilber-Thermometer Réaumurs 0 Grade zeigt.

Nehmen wir nun an, dass für einen andern Zustand der Atmosphäre, für welchen die Höhe des Barometers gleich b und die des Thermometers gleich t ist, die Refraction gleich r' seyn soll, und setzen wir der Kürze wegen $B = 28$ Par. Zolle.

Man hat daher

$$r' = r + t \cdot \frac{dr}{dt} + (b - B) \cdot \frac{dr}{db} + .$$

Setzt man diesen Ausdruck zur bequemeren Berechnung durch Logarithmen gleich

$$r' = \frac{r}{(1 + mt)^n} \cdot \left(\frac{b}{B}\right)^{n'},$$

so wird man die Werthe der beyden Exponenten n und n auf folgende Weise finden.

Es ist $(1 + mt)^{-n} = 1 - nmt +$ und eben so

$$\left(\frac{b}{B}\right)^{n'} = 1 + n'\left(\frac{b}{B} - 1\right) +,$$

und daher der letzte Ausdruck von r'

$$r' = r - mnrt + rn'\left(\frac{b}{B} - 1\right).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden oder mit

$$r' = r + t.\frac{dr}{dt} + B\left(\frac{b}{B} - 1\right).\frac{dr}{db},$$

so erhält man

$$n = -\frac{1}{mr}.\frac{dr}{dt} \text{ und } n' = \frac{B}{r}.\frac{dr}{db}.$$

Es ist daher nur noch übrig die Werthe von $\frac{dr}{db}$ und $\frac{dr}{dt}$ zu suchen.

I. Es war (§. 2)

$$r = \frac{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,1''}.\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Cos}\,z + \sqrt{2(\beta-\alpha) + \mathrm{Cos}^2 z}} \text{ oder}$$

$$r = \frac{2\alpha}{(1-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,1''}\,\mathrm{Sin}\,z\,\frac{\left\{\sqrt{2(\beta-\alpha)+\mathrm{Cos}^2 z} - \mathrm{Cos}\,z\right\}}{2(\beta-\alpha)}.$$

Nimmt man an, dass die Ausdehnung eines Volumens atmosphärischer Luft für jeden Grad Réaumur gleich m $= 0.00455$ sey, so wird man in dem letzten Ausdrucke von r, um die wahre Rectascension von r zu erhalten, die Grösse

$$\alpha \text{ in } \frac{\alpha}{1+mt}.\frac{b}{B} \text{ und}$$

$$\beta \text{ in } \beta(1+mt)$$

verwandeln. Bringt man diese Änderung von α wegen der Kleinheit von α nur in dem Zähler des Ausdruckes $\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ an, so erhält man aus dem letzten Werthe von r für die wahre Refraction

$$r' = \frac{2\alpha b\,\mathrm{Sin}\,z}{(1-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,1''(1+mt)B}\left\{\frac{\sqrt{2(1+mt)(\beta-\alpha)+\mathrm{Cos}^2 z} - \mathrm{Cos}\,z}{2(1+mt)(\beta-\alpha)}\right\}$$

$$= \frac{2\alpha b\,\mathrm{Sin}\,z}{(1-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,1''(1+mt)^2 B\sqrt{2(\beta-\alpha)}}.\left\{\sqrt{1+mt+\frac{\mathrm{Cos}^2 z}{2(\beta-\alpha)}} - \frac{\mathrm{Cos}\,z}{\sqrt{2(\beta-\alpha)}}\right\}.$$

Es war aber $\frac{2\alpha}{(1-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,1''} = 120''.2$ und

$$\frac{1}{\sqrt{2(\beta-\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{0.004}} = 15.8114;$$

also ist auch

$$r' = \frac{1900''.53\, b\, \mathrm{Sin}\, z}{(1+m\,t)^2\, B}\left\{\sqrt{1+m\,t+(15.8114\,\mathrm{Cos}\,z)^2} - 15.8114\,\mathrm{Cos}\,z\right\},$$

und daraus folgt,

$$\frac{d\,r'}{d\,b} = \frac{r'}{b} \text{ und}$$

$$\frac{d\,r'}{d\,t} = -\frac{2\,m\,r'}{1+m\,t} + \frac{1900''.53\,m\,b\,\mathrm{Sin}\,z}{2(1+m\,t)^2 B\sqrt{1+m\,t+(15.8114\,\mathrm{Cos}^2\,z)^2}},$$

also auch, wenn man in diesen Ausdrücken $t=0$ und $b=B$ oder $r'=r$ setzt,

$$\frac{d\,r}{d\,b} = \frac{r}{B} \text{ und } \frac{d\,r}{d\,t} = -2\,m\,r + \frac{1900''.53\,m\,\mathrm{Sin}\,z}{2\sqrt{1+(15.8114\,\mathrm{Cos}\,z)^2}}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\frac{d\,r}{d\,b}$ und $\frac{d\,r}{d\,t}$ in den vorhin gefundenen Ausdrücken von n und n', so hat man

$$n = 2 - \frac{950\,\mathrm{Sin}\,z}{r\sqrt{1+(15.8114\,\mathrm{Cos}\,z)^2}} \text{ und } n' = 1,$$

und daher wenn r die mittlere Refraction der Tafel für $B=28$ und $t=0$ ist, die wahre Refraction

$$r' = r.\frac{\frac{b}{B}}{(1+m\,t)^n}.$$

II. Noch muss bemerkt werden, dass die Höhe b des Barometers durch die von dem an seiner Scala hängenden, oder durch die von dem inneren Thermometer abhängende Correction auf die Temperatur des schmelzenden Eises gebracht werden muss, indem man die Grösse b durch $\frac{1}{1+0.000225\,t'}$ multiplicirt. Ist also $m=0.00455$, $m'=0.000225$, b die Höhe des Barometers in Par. Zolle und t t' die Höhe des äusseren und inneren Therm. Réaum. so ist

$$r' = r \cdot \frac{b}{B} \cdot \left(\frac{1}{1+mt}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{1+m't'}\right).$$

5. §. Wir haben bisher nur die Refraction den Beobachtungen gemäss bis $z = 85°$ dargestellt. Für grössere Zenithdistanzen gibt die Gleichung (I) des §. 2 die Refraction gegen die beobachteten zu klein, und es scheint daher nothwendig, die Refraction für die letzten fünf Grade unter einer weniger beschränkten Hypothese für die Abhängigkeit der Grössen ρ und s, als in §. 2 geschehen ist, zu bestimmen, obschon auch dann die Beobachtungen der dem Horizonte zu nahen Gestirne nicht ganz befriedigend dargestellt werden, da die Dünste und Ungleichheiten der untersten Schichten der Atmosphäre zu viele Anomalien erzeugen, die sich der Rechnung nicht wohl unterwerfen lassen. Bessel nimmt in seinem Fundam. astronomiae $\rho = \varepsilon^{-\beta s}$ an, wo ε die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und bestimmt daraus eine sehr umständliche Formel, nach welcher auch die l. c. S. 45 enthaltene Refractionstafel berechnet worden ist. Da diese Tafel die Beobachtungen sehr genau darstellt, so ist es interessant, zu sehen, ob sie nicht auch durch eine einfachere Formel dargestellt werden kann.

Die Gleichung I des §. 2 hat die Gestalt

$$r = \frac{A\,B\,\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Cos}\,z + \sqrt{A^2 + \mathrm{Cos}^2\,z}} \quad . \quad . \quad . \quad (A),$$

wo A und B constante Grössen und zwar B die Horizontal-Refraction für $z = 90°$ bezeichnet. Nach Bessels erwähnten Tafel ist $B = 2166''.8$.

Da dieser Ausdruck die Refraction von $z = 0$ bis $z = 85°$ sehr genau darstellt, so ist es wahrscheinlich, dass man dadurch auch die Refraction der fünf letzten Grade erhalten wird, wenn man in ihr die Grösse A mit den wachsenden Zenithdistanzen nach irgend einem Gesetze langsam abnehmen lässt. Sey z. B. R die mittlere Refraction der Tafel der Fund. astr. und

$$A = a + b\,R + c\,R^2 + d\,R^3.$$

Um die Factoren a, b, c, d zu bestimmen, findet man zuerst aus jenen Tafeln für kleinere Zenithdistanzen, wo man die Grössen b, c, d vernachlässigen kann, den Werth von

$a = 0.05325$. Kennt man dann für irgend einen gegebenen grösseren Werth von z die Refraction r jener Tafel, so findet man den Werth von A unmittelbar durch die Gleichung (A), oder bequemer durch die Ausdrücke

$$tg\,\psi = \frac{B}{r}\, Sin\, z \text{ und } A = -Cos\, z . tg\, 2\psi.$$

So geben die Tafeln für

z	R	also auch A
$z = 77°$	$R = 244''.07$	$A = 0.052713$
85	$584''.61$	0.050941
89	$1478''.20$	0.044558

Substituirt man diese Werthe von A und R nebst $a = 0.05325$ in der Gleichung

$$A = a + b\,R + c\,R^2 + d\,R^3,$$

so erhält man drey Gleichungen, aus denen man die Werthe von B, C und D finden wird. Man wird so erhalten

$$B = -0.000000\ 60173$$
$$C = -0\ 000000\ 007138$$
$$D = -0.000000\ 000002412$$

so dass daher ist

$$A = -0.05325 - (0.7794017 - 7)\,R - (0.8535765 - 9)\,R^2 + (0.3823773 - 12)\,R^3$$

wo die Factoren von R, R^2, R^3 schon Logarithmen sind.

Mit diesem Werthe von A gibt dann die Gleichung (A)

$$tg\,x = \frac{A}{Cos\, z},\ R = 2166''8\, Sin\, z . tg\, \frac{x}{2} \ldots\ldots (B).$$

Die folgende kleine Tafel ist nach den drey letzten Gleichungen berechnet worden.

z. . . A	R nach den vorhergehenden Gleichungen	R nach den Tafeln in Fund. astr.	Differenz
5° ..0.053247....	5''.04......	5''.04......	0''.00
10...0.053243....	10.16......	10.15......	0.01
20...0.053234....	20.97......	20.95......	0.02
30...0.053222....	33.26......	33.22......	0.04
40...0.053205....	48.30......	48.26......	0.04
50...0.053176....	68.54......	68.48......	0.06
60...0.053122....	99.41......	99.34......	0 07

z. . . A	R nach den vorhergehenden Gleichungen	R nach den Tafeln in Fund. astr.	Differenz
70° ... 0.052990 ...	156″.90	156″.75	0.15
80 .... 0.052427	315 .10	315 .13	0.03
81 .... 0.052277	348 .13	348 .14	0.01
83 .... 0.051818	438 .25	438 .27	0.02
85 .... 0.050941	584 .57	584 .61	0.04
87 .... 0.049018	855 11	855 .97	0.86
89 .... 0 044554	1478 16	1478 .20	0.04

Man muss noch bemerken, dass diese Tafel der Fund. astr. die mittlere Refraction R für $b = 27.773$ Par. Zoll und $t = +7°.44$ Réaumur gibt, und dass Bessel später aus seinen eigenen Beobachtungen gefunden hat, dass die sämmtlichen Zahlen dieser Tafel durch 1.00328 multiplicirt werden sollen. Bringt man diese Verbesserung an und reducirt man überdiess die Tafel auf $b = 28$ und $t = 0$, so hat man, wenn R die Refraction der Tafel Fund. astr. und r die Refraction unserer Tafel XIX bezeichnet,

$$r = R.(1.01311)(1.033908)^n,$$

wo man R aus der vorhergehenden Gleichung (B) erhält. Nach dieser Formel sind die Refractionen der letzten fünf Grade unserer Tafel berechnet worden. So ist z. B. für $z = 85$

Nach Fund. astr. . . . $\log R = 2.76683$ und $n = 1.123$

$$\begin{aligned} \log 1.01311 \;.\;.\;.\; & 0.00566 \\ n \log 1.033908 \;.\;.\;.\; & 0.01626 \\ \hline \log r = & 2.78875 \end{aligned}$$

Die drey angehängten kleineren Tafeln zu Taf. XIX geben die Werthe von

$\frac{b}{28}$ für das Barometer b Par. Zolle,

$\frac{1}{1 + mt}$ für das äussere Therm. Réaum. t

$\frac{1}{1 + m't'}$ für das innere Therm. Réaum. t'

so dass die wahre Refraction r' ist

$$r' = r.\frac{b}{28}.\frac{1}{1 + m't'}.\left(\frac{1}{1 + mt}\right)^n.$$

Ex. I. Sey $z = 76°45'0''$, $b = 26.7$, $t' = +20$ und $t = +25°$

$$z \text{ gibt } \log r = 2.3989 \text{ und } n = 1.020$$

$$b \text{ - - } \log \frac{b}{B} = 9.9794 \qquad t \text{ gibt } -0.0468$$

$$t' \text{ - - } \log \frac{1}{1+m't'} = 9.9980$$

$$(-0.0468)\, n = -0.0477$$

$$\log r' = 2.3286$$

$$r' = 213''.1 = 3'\,33''.1.$$

Ex. II. $z = 84°\,23'\,54''$, $b = 28.75$, $t' = -14°.0$ und $t = -18°.0$

$$z \text{ gibt } \log r = 2.7476 \text{ und } n = 1.081$$

$$b \text{ - - - - - - - } 0.0114 \qquad t \text{ gibt } 0.0372$$

$$t' \text{ - - - - - - - } 0.0014$$

$$(0.0372)\, n \text{ - } 0.0402$$

$$\log r' = 2.8006$$

$$r' = 631''.9 = 10'\,31''.9.$$

V o r l e s u n g XI.

Heliocentrischer und geocentrischer Ort der Planeten und Kometen.

1. §. Ausser unserer Erde gibt es noch viele andere Himmelskörper, die sich in elliptischen Bahnen um die Sonne, die einen der beyden Brennpuncte dieser Ellipse einnimmt, bewegen, und die unter dem Namen der Planeten und Kometen bekannt sind.

Die Puncte, in welchen die Ebene der Bahn des Planeten oder Kometen die Ecliptik durchschneidet, heissen die Knoten der Bahn (S. 75), und zwar der aufsteigende ☊ (fig. 5) der, von welchem der Planet sich über die Ecliptik oder gen Norden erhebt, während der andere entgegengesetzte der niedersteigende Knoten ☋ ist. Die beyde Knoten verbindende, durch den Mittelpunct der Sonne gehende Gerade ist die Knotenlinie. Der Winkel der Ebene der Bahn mit der Ebene der Ecliptik ist die Neigung der Bahn. Die grosse Axe AP der Ellipse heisst auch die Apsidenlinie oder die doppelte mittlere Entfernung, und von ihren beyden Endpuncten ist der P, welcher der Sonne am nächsten liegt, die Sonnennähe oder das Perihelium, der andere entgegengesetzte A aber die Sonnenferne oder das Aphelium. Die Entfernung des Periheliums von der Sonne Mittelpunct ist die kürzeste Distanz FP, die Entfernung $FM = r$ jedes anderen Punctes M der Bahn von der Sonne Mittelpunct aber ist der Radius Vector, so wie der Winkel $PFM = v$ die wahre Anomalie (S. 56) dieses Punctes M.

Sey F ♈ die Linie der Frühlingsnachtgleiche, also, da F ♈ und F ☊ in der Ebene der Ecliptik liegen, ♈ F ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens, die wir künftig durch k

bezeichnen wollen. Man nehme eben so in der Ebene der Bahn selbst, von F ☊ rückwärts einen Winkel ☊ F B = ☊ F ♈, also ☊ F B = k, so heisst der Winkel B F P = Π die Länge des Periheliums und B F M = l' die Länge des Planeten in der Bahn, und der Winkel, welchen F ♈ mit dem auf die Ecliptik projicirten Radius Vector r bildet, die reducirte Länge oder die Länge des Planeten in der Ecliptik, welche letzte wir durch l bezeichnen wollen. Der Unterschied $l' - l$ heisst die Reduction. Der Winkel des Radius Vectors F M mit der Axe der Ecliptik heisst die Poldistanz p des Planeten und sein Complement zu 90 die Breite desselben. Endlich nennt man noch den Winkel ☊ F M = u das Argument der Breite und ☊ F P = ω die Distanz des Periheliums vom Knoten. Die Neigung der Bahn gegen die Ecliptik, welche wir durch n bezeichnen wollen, nehmen wir immer zwischen den Grenzen 0° und 180° an, so dass alle Körper, deren Neigung kleiner als 90° ist, eine rechtläufige Bewegung (von West gen Ost) haben, während alle übrigen sich rückläufig oder von Ost gen West bewegen.

2. §. Dieses vorausgesetzt, hat man

Distanz des Periheliums vom Knoten $\omega = \Pi - k$

Argument der Breite - - - - $u = v + \omega = v + \Pi - k$

Länge in der Bahn - - - - $l' = u + k = v + \Pi$

Reduction - - - - - - - - $l' - l = u + k - l$,

wo man auch für rückläufige Bewegungen $\omega = k - \Pi'$ und $u = v - \Pi + k$ und für die Reduction $u + l - k$ setzen kann.

Das sphärische Dreyeck aber, welches von den Verlängerungen der Linien F ☊, F M und von der Projection der F M in der Ecliptik, gebildet wird, gibt folgende Ausdrücke:

$$\text{tg}\,(l - k) = \text{Cos}\,n\,\text{tg}\,u$$

$$\text{Cotg}\,p = \text{tg}\,n\,\text{Sin}\,(l - k)$$

$$\text{Cos}\,p = \text{Sin}\,n\,\text{Sin}\,u$$

$$\text{Sin}\,p = \frac{\text{Cos}\,u}{\text{Cos}\,(l - k)},$$

wo p die aus der Sonne gesehene Distanz des Planeten von dem Pole der Ecliptik bezeichnet.

Auch hat man für die Reduction

$$\text{Sin}\,(u - (l - k)) = \text{Sin}\,u\,\text{Cos}\,(l - k) - \text{Cos}\,u\,\text{Sin}\,(l - k).$$

Aber $\mathrm{Cos\,u\,Sin\,(l-k) = Sin\,u\,Cos\,(l-k)\,Cos\,n}$ und

$$\mathrm{Sin\,u} = \frac{\mathrm{Cos\,p}}{\mathrm{Sin\,n}}, \text{ also ist auch}$$

$$\mathrm{Sin\,(u+k-l) = tg\,\frac{n}{2}\,Cos\,p\,Cos\,(l-k)}$$

$$\mathrm{= tg\,\frac{n}{2}\,Cotg\,p\,Cos\,u} \text{ und eben so}$$

$$\mathrm{Sin\,(u+l-k) = Cotg\,\frac{n}{2}\,Cos\,p\,Cos\,(l-k)}$$

$$\mathrm{= Cotg\,\frac{n}{2}\,Cotg\,p\,Cos\,u.}$$

Ex. Ist $u = 127°\,5'\,55''$ und $k = 112°\,1'\,30''$ und
$n = 2°\,29'\,47''$ so ist $u + k - l = 0°\,1'\,34''.2$
$l = 239°\,8'\,59''.2$ und $p = 88°\,0'\,32''.8$.

3. §. Die Gleichungen, welche wir S. 56 für die Erde gegeben haben, werden hier auch für die Bestimmung des wahren von dem Mittelpuncte der Sonne gesehenen oder des heliocentrischen Ortes der Planeten und Kometen gelten. Ist also T die Umlaufszeit des Planeten um die Sonne, t die Zeit seit dem Durchgange des Planeten durch sein Perihelium, a und $a\varepsilon$ die halbe grosse Axe seiner Bahn und die Excentricität derselben, so hat man

$$m = 360\,\frac{t}{T}$$

$$m = u' - \varepsilon\,\mathrm{Sin}\,u'$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{u'}{2}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

$$r = a\,(1 - \varepsilon\,\mathrm{Cos}\,u'),$$

wodurch man v und r oder die wahre Anomalie und den Radius Vector findet.

Aus v aber findet man das Argument der Breite u und daraus l und p durch die Ausdrücke des §. 2

$$u = v + \Pi - k$$

$$\mathrm{tg\,(l-k) = Cos\,n\,tg\,u}$$

$$\mathrm{Cotg\,p = tg\,n\,Sin\,(l-k)},$$

wo l und p die aus dem Mittelpuncte der Sonne gesehene oder die heliocentrische wahre Länge und Distanz des Planeten von dem Pole der Ecliptik ist.

4. §. Es sey nun eben so λ und π die wahre von dem Mittelpuncte der Erde gesehene oder die geocentrische Länge und Distanz des Planeten von dem Pole der Ecliptik und ρ die Entfernung desselben von der Erde.

Um die Grössen λ, π und ρ aus l, p und r zu finden, muss man offenbar auch die Lage der Erde gegen die Sonne kennen. Sey also, analog mit dem Vorhergehenden, L und P die von der Sonne gesehene oder die heliocentrische Länge und Distanz der Erde von dem Pole der Ecliptik und R die Entfernung der Erde von der Sonne.

Bezeichnet man der Kürze wegen die Projection der Grössen r, ρ und R auf die Ecliptik durch r′, ρ' und R′ oder setzt man $r' = r \operatorname{Sin} p$, $\rho' = \rho \operatorname{Sin} \pi$ und $R' = R \operatorname{Sin} P$, so hat man, wie S. 82, wenn N irgend einen willkürlichen Winkel bezeichnet, die Gleichungen

$$\rho' \operatorname{Cos} (\lambda - N) = r' \operatorname{Cos} (l - N) - R' \operatorname{Cos} (L - N)$$
$$\rho' \operatorname{Sin} (\lambda - N) = r' \operatorname{Sin} (l - N) - R' \operatorname{Sin} (L - N)$$
$$\rho \operatorname{Cotg} \pi = r' \operatorname{Cotg} p - R' \operatorname{Cotg} P.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken z. B. $N = \frac{1}{2}(l + L)$, so erhält man

$$\operatorname{tg}(\lambda - \tfrac{1}{2}(l + L)) = \frac{r' + R'}{r' - R'} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(l - L),$$

$$\rho' = (r' + R') \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(l - L)}{\operatorname{Sin}(\lambda - \frac{1}{2}(l + L))},$$

$$\operatorname{Cotg} \pi = \frac{r' \operatorname{Cotg} p - R' \operatorname{Cotg} P}{\rho'},$$

und durch diese Gleichungen findet man den geocentrischen Ort $\lambda\ \pi\ \rho$ der Planeten aus dem durch die Tafeln gegebenen heliocentrischen Orte l p r derselben.

Ex. Sey $u = 212° 13' 26''.9$, $\log r = 9.668747$
$k = 46° 3' 7''.7$, $n = 7° 0' 9''.1$.

Daraus findet man durch die Gleichungen des §. 2
$l = 258° 4' 59''.0$ und $p = 93° 43' 38''.3$.

Ist überdiess $L = 15° 59' 35''.9$, $\log R = 9.999077$ und $P = 90°$, so findet man nach den Gleichungen des §. 4 den geocentrischen Ort des Planeten in Beziehung auf die Ecliptik $\lambda = 214° 41' 0''.3$, $\pi = 91° 21' 11''.9$ und $\log \rho' = 0.10833638$.

Sucht man endlich aus λ und π die geocentrische Rectascension a und Distanz p von dem Pole des Äquators, so findet man nach S. 30, wenn $e = 23° 27' 52''.4$ die Schiefe der Ecliptik ist,

$$a = 211° 56' 13''.2 \text{ und } p = 104° 22' 11''.9.$$

5. §. Eben so kann man auch umgekehrt, den heliocentrischen Ort u und r des Planeten finden, wenn der geocentrische Ort $\lambda\, \pi\, \rho$ und der heliocentrische Ort L P R der Erde gegeben sind. Da aber die Grösse ρ nicht durch die Beobachtungen unmittelbar gegeben wird, so wollen wir an ihrer Stelle die bekannten Grössen k und n substituiren. Setzt man dann $P = 90$, da die Erde sich immer sehr nahe in der Ecliptik bewegt, so hat man

$$r \operatorname{Cos} u - R \operatorname{Cos}(L - k) = \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos}(\lambda - k)$$
$$r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} n - R \operatorname{Sin}(L - k) = \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin}(\lambda - k)$$
$$r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n = \rho \operatorname{Cos} \pi.$$

Die Division der beyden letzten dieser drey Gleichungen gibt

$$\frac{r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} n - R \operatorname{Sin}(L - k)}{r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n} = \operatorname{tg} \pi \operatorname{Sin}(\lambda - k) \text{ oder}$$

$$r \operatorname{Sin} u = \frac{R \operatorname{Sin}(L - k)}{\operatorname{Cos} n - \operatorname{Sin} n \operatorname{tg} \pi \operatorname{Sin}(\lambda - k)} \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Eben so gibt die Division der ersten und dritten dieser Gleichungen

$$\frac{r \operatorname{Cos} u - R \operatorname{Cos}(L - k)}{r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n} = \operatorname{tg} \pi \operatorname{Cos}(\lambda - k),$$

oder wenn man den Werth von r Sin u aus (I) substituirt,

$$r \operatorname{Cos} u = \frac{R\left(\operatorname{Sin} n \operatorname{tg} \pi \operatorname{Sin}(L - \lambda) + \operatorname{Cos} n \operatorname{Cos}(L - k)\right)}{\operatorname{Cos} n - \operatorname{Sin} n \operatorname{tg} \pi \operatorname{Sin}(\lambda - k)} \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Die beyden Gleichungen (I) und (II) geben daher die beyden gesuchten Grössen u und r.

Setzt man der Kürze wegen $\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{Cos}(L - k) \operatorname{Cotg} \pi}{\operatorname{Sin}(L - \lambda)}$ und $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{Cotg} \pi}{\operatorname{Sin}(\lambda - k)}$, so erhält man

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{Sin} A \operatorname{tg}(L-k)}{\operatorname{Sin}(A+n)} \text{ und } r = \frac{R \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin}(L-k)}{\operatorname{Sin}(B-n) \operatorname{Sin} u},$$

und daher auch $\rho = \frac{R \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin}(L-k) \operatorname{Sin} n}{\operatorname{Cos} \pi \operatorname{Sin}(B-n)} = \frac{r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n}{\operatorname{Cos} \pi}$.

Ex. Ist $\lambda = 80^\circ$, $\pi = 80^\circ$, $n = 5^\circ$, $k = 15^\circ$, $L = 60^\circ$ und $R = 1$, so findet man $u = 52^\circ 52' 12''.4$, $\log r = 0.208925$ und $\log \rho = 9.811156$.

I. Wäre nebst den geocentrischen Grössen λ und π und dem heliocentrischen Orte der Erde L und P noch aus den Tafeln der Radius Vector r gegeben, so hätte man die Gleichungen

$$r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} l = R \operatorname{Sin} P \operatorname{Cos} L + \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \lambda$$
$$r \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} l = R \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} L + \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \lambda$$
$$r \operatorname{Cos} p = R \operatorname{Cos} P + \rho \operatorname{Cos} \pi$$

und daraus würde man den heliocentrischen Ort des Planeten oder die Grössen l und p auf folgende Art finden.

Quadrirt und addirt man diese drey Gleichungen, und setzt der Kürze wegen

$$\operatorname{Cos} \psi = \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos}(L-\lambda) + \operatorname{Cos} P \operatorname{Cos} \pi,$$

so erhält man

$$r^2 = R^2 + \rho^2 + 2 R \rho \operatorname{Cos} \psi, \text{ also auch}$$
$$\rho = \sqrt{r^2 - R^2 \operatorname{Sin}^2 \psi} - R \operatorname{Cos} \psi.$$

Da so die Grösse ρ bekannt ist, so hat man

$$\operatorname{Cos} p = \frac{R \operatorname{Cos} P + \rho \operatorname{Cos} \pi}{r},$$

$$\operatorname{Sin} l = \frac{R \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} L + \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \lambda}{r \operatorname{Sin} p} \text{ und}$$

$$\operatorname{Cos} l = \frac{R \operatorname{Sin} P \operatorname{Cos} L + \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \lambda}{r \operatorname{Sin} p}.$$

II. Zwischen den Grössen L, l, λ und R', r', ρ', den Projectionen von R, r, ρ auf die Ecliptik, haben überhaupt folgende Gleichungen Statt:

$$\left.\begin{aligned} R' \operatorname{Sin}(l-L) &= \rho' \operatorname{Sin}(\lambda-l) \\ R' \operatorname{Sin}(\lambda-L) &= r' \operatorname{Sin}(\lambda-l) \\ \rho' \operatorname{Sin}(\lambda-L) &= r' \operatorname{Sin}(l-L) \end{aligned}\right\} \text{ und}$$

$$\left.\begin{aligned} R' \operatorname{Cos}(l-L) + \rho' \operatorname{Cos}(\lambda-l) &= r' \\ r' \operatorname{Cos}(\lambda-l) - R' \operatorname{Cos}(\lambda-L) &= \rho' \\ r' \operatorname{Cos}(l-L) - \rho' \operatorname{Cos}(\lambda-L) &= R' \end{aligned}\right\}.$$

Endlich ist in dem ebenen Dreyecke, welches von den drey Seiten R' r' und ρ' gebildet wird,

der Winkel zwischen R' und r' an der Sonne oder die Commutation $= l - L$

der Winkel zwischen r' und ρ' an den Planeten oder die jährliche Parallaxe $= \lambda - l$

der Winkel zwischen ρ' und R' an der Erde oder die Elongation $= 180 - (\lambda - L)$.

6. §. Um noch zu untersuchen, welchen Einfluss kleine Änderungen in der heliocentrischen Lage des Planeten auf die geocentrische Lage desselben haben, und umgekehrt, werden wir die drey ersten Gleichungen des §. 4 in Beziehung auf alle in ihnen enthaltenen Grössen ausser R' und L differentiiren. Man erhält so, wenn man $N = 0$ setzt,

$$d\rho' = dr' \operatorname{Cos}(l - \lambda) - r'\, dl \operatorname{Sin}(l - \lambda)$$

$$d\lambda = \frac{r'\, dl}{\rho'} \operatorname{Cos}(l - \lambda) + \frac{dr'}{\rho'} \operatorname{Sin}(l - \lambda)$$

$$d\pi = -\frac{dr'}{\rho'} \operatorname{Sin}^2 \pi \left(\operatorname{Cotg} p - \operatorname{Cotg} \pi \operatorname{Cos}(l - \lambda)\right)$$
$$- \frac{dl}{\rho'} \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \pi \operatorname{Sin}(l - \lambda)$$
$$+ \frac{r'\, dp}{\rho'} \cdot \frac{\operatorname{Sin}^2 \pi}{\operatorname{Sin}^2 p}$$

und eben so für den heliocentrischen Ort

$$dr' = d\rho' \operatorname{Cos}(\lambda - l) - \rho'\, d\lambda \operatorname{Sin}(\lambda - l)$$

$$dl = \frac{d\rho'}{r'} \operatorname{Sin}(\lambda - l) + \frac{\rho'\, d\lambda}{r'} \operatorname{Cos}(l - \lambda)$$

$$dp = -\frac{d\rho'}{r'} \operatorname{Sin}^2 p \left(\operatorname{Cotg} \pi - \operatorname{Cotg} p \operatorname{Cos}(\lambda - l)\right)$$
$$- \frac{\rho'\, d\lambda}{r'} \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin}(\lambda - l)$$
$$+ \frac{\rho'\, d\pi}{r'} \frac{\operatorname{Sin}^2 p}{\operatorname{Sin}^2 \pi}.$$

Setzt man den ersten dieser drey Gleichungen auch noch die Ausdrücke hinzu, welche aus den Differentialien der Grössen R' und L in den Gleichungen des §. 4 folgen, so wird man die Änderungen des geocentrischen Orts oder

$d\rho'$, $d\lambda$ und $d\pi$ erhalten, wenn dl, dL . . . die gegebenen heliocentrischen Änderungen des Planeten und der Erde in derselben Zwischenzeit bezeichnen.

7. §. Beschliessen wir diesen Gegenstand noch durch eine andere Auflösung des schon in §. 4 betrachteten Problems, und suchen wir aus dem heliocentrischen Orte des Planeten oder aus den Grössen r, u, n, k und aus dem gegebenen Orte L, B, P der Erde, unmittelbar die geocentrische Rectascension a und Distanz p von dem Pole des Äquators und die Entfernung ρ des Planeten von der Erde.

Bestimmt man zuerst die Lage des Mittelpuncts der Erde gegen den der Sonne durch die drey rechtwinkligen Coordinaten X, Y, Z, wo X in der Linie der Nachtgleichen und XY im Äquator liegt, so hat man, wenn e die Schiefe der Ecliptik bezeichnet,

$$X = R \operatorname{Sin} P \operatorname{Cos} L$$
$$Y = R \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} L \operatorname{Cos} e - \operatorname{Cos} P \operatorname{Sin} e$$
$$Z = R \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} L \operatorname{Sin} e + \operatorname{Cos} P \operatorname{Cos} e.$$

Seyen nun x y z die den vorigen parallelen Coordinaten, welche die Lage des Planeten gegen den Mittelpunct der Sonne bestimmen, so dass man hat

$$x - X = \rho \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} a$$
$$y - Y = \rho \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} a$$
$$z - Z = \rho \operatorname{Cos} p.$$

Um die Grösse x y z zu finden, bestimme man anfangs die Lage des Planeten gegen die Sonne durch die drey Coordinaten x'' y'' z'', wo x'' in der Knotenlinie der Bahn mit der Ecliptik und $x''y''$ in der Ecliptik selbst liegen, so ist

$$x'' = r \operatorname{Cos} u, \quad y'' = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} n, \quad z'' = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n.$$

Gehen aber diese Coordinaten in andere x' y' z' über, wovon x' in der Linie der Nachtgleichen, und x' y' in der Ebene der Ecliptik liegen, so ist

$$x' = x'' \operatorname{Cos} k - y'' \operatorname{Sin} k$$
$$y' = x'' \operatorname{Sin} k + y'' \operatorname{Cos} k$$
$$z' = z''.$$

Vergleicht man endlich noch diese Coordinaten mit den zuerst eingeführten x, y, z, von welchen x in der Linie der

Nachtgleichen und x y in der Ebene des Äquators liegen, so hat man

$$x = x'$$
$$y = y' \operatorname{Cos} e - z' \operatorname{Sin} e$$
$$z = y' \operatorname{Sin} e + z' \operatorname{Cos} e.$$

Substituirt man in den letzten Gleichungen die vorhergehenden Werthe von x', x'' . . . so erhält man die Grössen $x y z$ durch $r u k n$ und e ausgedrückt. Zur bequemeren Berechnung dieser Ausdrücke wollen wir folgende Hülfsgrössen einführen:

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{Cotg} k}{\operatorname{Cos} n}, \qquad \operatorname{Sin} a = \frac{\operatorname{Cos} k}{\operatorname{Sin} A}, \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg} n}{\operatorname{Cos} k},$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{Sin} k \operatorname{Cos} e \operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Sin} n \operatorname{Cos}(\psi + e)}, \operatorname{Sin} b = \frac{\operatorname{Cos} e \operatorname{Sin} k}{\operatorname{Sin} B},$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{Sin} k \operatorname{Sin} e \operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Sin} n \operatorname{Sin}(\psi + e)}, \operatorname{Sin} c = \frac{\operatorname{Sin} e \operatorname{Sin} k}{\operatorname{Sin} C}.$$

Dieses vorausgesetzt, erhält man die einfachen Ausdrücke

$$x = r \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin}(A + u)$$
$$y = r \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin}(B + u)$$
$$z = r \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin}(C + u).$$

Da man also die Grössen $x y z$ und $X Y Z$ kennt, so erhält man die gesuchten Werthe von a, p und ρ durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} a = \frac{y - Y}{x - X},$$

$$\operatorname{Cotg} p = \frac{z - Z}{x - X} \operatorname{Cos} a = \frac{z - Z}{y - Y} \operatorname{Sin} a,$$

$$\rho = \frac{z - Z}{\operatorname{Cos} p} = \frac{y - Y}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} p} = \frac{x - X}{\operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} p}.$$

Ex. Sey gegeben $u = 212° 15' 26''.9$, $\log r = 9.6687470$ $k = 46° 3' 7''.7$, $n = 7° 0' 9''.1$, $e.\ 23° 27' 52''.4$ und $L = 15° 59' 35''.9$, $\log R = 9.9990770$ und $P = 90°$. Mit diesen Grössen findet man

A = 135° 50′ 16″.1	log Sin a = 9.9983206
B = 48 32 52.4	log Sin b = 9.9450529
C = 36 35 35.9	log Sin c = 9.6820559

und daraus folgt

$$X = 0.9592530 \quad , \quad x = -0.0961018$$
$$Y = 0.2522046 \quad\quad y = -0.4056417$$
$$Z = 0.1094761 \quad\quad z = -0.2091323$$

also auch geocentrische Rectascension $a = 211°56' 13''.2$
geocentrische Poldistanz $p = 104° 22' 12''.1$
$\rho = 1.2837618$

(Vergl. S. 118)

8. §. Das zuletzt angezeigte Verfahren ist besonders dann sehr vortheilhaft, wenn man mehrere geocentrische Orte desselben Planeten oder Kometen, z. B. für eine Ephemeride zu berechnen hat. (Vergl. Calendariographie S. 223 u. ff.)

Von den angeführten Hülfsgrössen sind a, b, c resp. die Neigungen der Ebene der Planetenbahn gegen die coordinirten Ebenen der yz, xz und xy, und eben so A, B, C die Winkel der Knotenlinie der Bahn in der Ecliptik mit den Knotenlinien der Bahn in denselben coordinirten Ebenen der yz, xz und xy, wo xy die Ebene des Äquators xz die des Colurs der Nachtgleichen und yz die des Colurs der Solstitien ist. Um diess zu zeigen, sey (fig. 2) P der Pol des Äquators AQ, so wie ♈B die Ecliptik und FDN die Planetenbahn, also PQR, P♈R und A♈Q resp. die Ebene der yz xz und xy, und daher auch

ERF = DQR = ♈BQ = E♈D = 90° und eben so
♈P = ♈B = ♈Q = 90° und
Q♈B = e, BCN = n, ♈C = k. Dieses vorausgesetzt, ist
CNB = a, FC = A, REC = b, EC = B, NDQ = c und
CD = C,

also hat man in dem sphärischen Dreyecke BNC

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{Cotg} k}{\operatorname{Cos} n}, \ \operatorname{Sin} a = \frac{\operatorname{Cos} k}{\operatorname{Sin} A}, \ \operatorname{Cos} a = \operatorname{Sin} k \operatorname{Sin} n,$$

in dem Dreyecke ♈CE

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{Sin} k}{\operatorname{Cos} k \operatorname{Cos} n - \operatorname{Sin} n \operatorname{tg} e}, \ \operatorname{Sin} b = \frac{\operatorname{Sin} k \operatorname{Cos} e}{\operatorname{Sin} B},$$

$$\operatorname{Cos} b = -\operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} e - \operatorname{Cos} k \operatorname{Sin} n \operatorname{Cos} e,$$

und in dem Dreyecke C♈D

$$\text{tg}\, C = \frac{\text{Sin}\, k}{\text{Cos}\, k\, \text{Cos}\, n + \text{Sin}\, n\, \text{Cotg}\, e}, \quad \text{Sin}\, c = \frac{\text{Sin}\, e\, \text{Sin}\, k}{\text{Sin}\, C},$$

$$\text{Cos}\, c = \text{Cos}\, n\, \text{Cos}\, e - \text{Cos}\, k\, \text{Sin}\, n\, \text{Sin}\, e,$$

welche Ausdrücke mit den vorhergehenden übereinstimmen.

Zwischen diesen Grössen A, B, C und a, b, c gibt es mehrere Bedingungsgleichungen, die man durch die Auflösung der Dreyecke FER, ♈ED und QND finden kann. Man erhält nämlich

$$\text{Sin}\,(A - B)\, \text{Sin}\, a\, \text{Sin}\, b = \text{Cos}\, c$$
$$\text{Sin}\,(B - C)\, \text{Sin}\, b\, \text{Sin}\, c = \text{Cos}\, a$$
$$\text{Sin}\,(C - A)\, \text{Sin}\, a\, \text{Sin}\, c = \text{Cos}\, b$$
$$\text{Cotg}\,(A - B)\, \text{Cotg}\,(C - A) = \text{Cos}^2\, a$$
$$\text{Cotg}\,(B - C)\, \text{Cotg}\,(A - B) = \text{Cos}^2\, b$$
$$\text{Cotg}\,(C - A)\, \text{Cotg}\,(B - C) = \text{Cos}^2\, c$$

$$\text{Cos}\,(A-B) = -\text{Cotg}\, a\, \text{Cotg}\, b = \text{Sin}\,(C-A)\, \text{Sin}\,(C-B)\, \text{Sin}^2\, c$$
$$\text{Cos}\,(B-C) = -\text{Cotg}\, b\, \text{Cotg}\, c = \text{Sin}\,(A-B)\, \text{Sin}\,(A-C)\, \text{Sin}^2\, a$$
$$\text{Cos}\,(C-A) = -\text{Cotg}\, a\, \text{Cotg}\, c = \text{Sin}\,(B-C)\, \text{Sin}\,(B-A)\, \text{Sin}^2\, b$$

9. §. Addirt man zu den Grössen A, B, C, die Länge des Periheliums weniger der Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn in der Ecliptik, und nennt man die so veränderten Grössen α, β, γ, und bezeichnet man endlich die halbe grosse Axe der Bahn und ihre Excentricität durch a' und $a'\varepsilon$, so wie die wahre Anomalie vom Perihelium durch v, so hat man

$$x = \frac{a'(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\, \text{Cos}\, v}\, \text{Sin}\, a\, \text{Sin}\,(\alpha + v),$$

$$y = \frac{a'(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\, \text{Cos}\, v}\, \text{Sin}\, b\, \text{Sin}\,(\beta + v),$$

$$z = \frac{a'(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\, \text{Cos}\, v}\, \text{Sin}\, c\, \text{Sin}\,(\gamma + v).$$

Noch einfacher werden diese Ausdrücke für parabolische Bahnen, wo sie die Form annehmen

$$x = m\, \frac{\text{Sin}\,(M + v)}{\text{Cos}^2\, \frac{1}{2} v},$$

$$y = n\, \frac{\text{Sin}\,(N + v)}{\text{Cos}^2\, \frac{1}{2} v},$$

$$z = p \frac{\sin(P + v)}{\cos^2 \frac{1}{2} v}.$$

So hat man für den Kometen von 1827 Länge des Perihels 250° 58′.2, $k = 149° 39'.1$, $n = 54° 3'.3$, $e = 23° 27'.7$ und den kleinsten Abstand desselben von der Sonne 0.137499, also auch

$$x = 0.12547 \sin(187° 38'.9 + v) \sec^2 \tfrac{1}{2} v$$
$$y = 0.06667 \sin(331° 36'.2 + v) \sec^2 \tfrac{1}{2} v$$
$$z = 0.13276 \sin(270° 42'.3 + v) \sec^2 \tfrac{1}{2} v.$$

Diese Darstellung der Ausdrücke von $x\,y\,z$ ist auch sehr geschickt, die Änderungen der Coordinaten zu bestimmen, die aus irgend einer Änderung der Elemente der Bahn entspringen. So findet man, wenn α, β, γ die vorhergehende Bedeutung haben,

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dn}\right) &= x(\cos A \operatorname{Cotg} a - \sin A \operatorname{Cotg} a \operatorname{Cotg}(\alpha + v)) \\
\left(\frac{dy}{dn}\right) &= y(\cos B \operatorname{Cotg} b - \sin B \operatorname{Cotg} b \operatorname{Cotg}(\beta + v)) \\
\left(\frac{dz}{dn}\right) &= z(\cos C \operatorname{Cotg} c - \sin C \operatorname{Cotg} c \operatorname{Cotg}(\gamma + v))
\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dk}\right) &= x\left(\left(\frac{\cos n}{\sin^2 a} - 1\right) \operatorname{Cotg}(\alpha + v) - \sin n \sin A \operatorname{Cotg} a\right) \\
\left(\frac{dy}{dk}\right) &= y\left(\left(\frac{\cos c \cos e}{\sin^2 b} - 1\right) \operatorname{Cotg}(\beta + v) \right. \\
&\qquad \left. - \sin n \sin B \operatorname{Cotg} b\right) \\
\left(\frac{dz}{dk}\right) &= z\left(\left(\frac{\cos b \sin e}{\sin^2 c} - 1\right) \operatorname{Cotg}(\gamma + v) \right. \\
&\qquad \left. - \sin n \sin C \operatorname{Cotg} c\right)
\end{aligned}\right\}.$$

Ferner, wenn a' die halbe grosse Axe und $a'\varepsilon$ die Excentricität bezeichnet, und $\frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} + \frac{\cos v}{1 + \varepsilon \cos v} = \omega$ ist,

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{da'}\right) &= \frac{x}{a'} \\
\left(\frac{dy}{db'}\right) &= \frac{y}{a'} \\
\left(\frac{dz}{dc'}\right) &= \frac{z}{a'}
\end{aligned}\right\} \text{ und } \left.\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right) &= -x\omega \\
\left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right) &= -y\omega \\
\left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right) &= -z\omega
\end{aligned}\right\},$$

welche Ausdrücke sich leicht fortsetzen lassen. Hat man so die vollständigen Werthe von

$$dx = \left(\frac{dx}{dn}\right) dn + \left(\frac{dx}{dk}\right) dk + \left(\frac{dx}{da'}\right) da' + \;.\;.$$

und eben so von dy und dz erhalten, so kann man daraus und aus den Differentialien der in §. 7 gegebenen Ausdrücke von $x - X$, $y - Y$, $z - Z$ auch die durch jene Änderungen der Elemente entstandenen Änderungen der Elemente der geocentrischen Rectascension a und Poldistanz p erhalten, nämlich:

$$da = \frac{dy \operatorname{Cos} a - dx \operatorname{Sin} a}{\rho \operatorname{Sin} p} \text{ und}$$

$$dp = \frac{dx}{\rho} \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} p + \frac{dy}{\rho} \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} p - \frac{dz}{\rho} \operatorname{Sin} p.$$

Vorlesung XII.

Bestimmung der Elemente der Planeten und Kometen aus den Beobachtungen.

1. §. Die wesentlichen Eigenschaften der Bahnen der Himmelskörper, wodurch man sie unter einander mit Sicherheit unterscheiden kann, oder die Elemente dieser Bahnen sind im Allgemeinen sechs, nämlich 1) die Grösse der grossen Axe, oder, was dasselbe ist, die Umlaufszeit des Planeten in die Sonne, da nach dem S. 54 erwähnten Gesetze die eine dieser beyden Grössen durch die andere gegeben ist. 2) Die Länge Π des Periheliums. 3) Die Excentricität a ε der Bahn. 4) Die Neigung n der Bahn gegen die Ecliptik. 5) Die Länge k des aufsteigenden Knotens dieser Bahn in der Ecliptik, und endlich 6) die Epoche oder die wahre Länge des Planeten in seiner Bahn für irgend eine bestimmte Zeit.

Unsere Aufgabe ist nun aus blossen Beobachtungen der geocentrischen Längen λ und Distanzen π von dem Pole der Ecliptik diese sechs Elemente der Bahn abzuleiten.

Wir behalten auch hier die Bezeichnungen der vorhergehenden XI. Vorlesung bey, indem wir die zu dem heliocentrischen Orte des Planeten gehörenden Grössen mit den kleinen römischen Buchstaben l p r x y z, die zu dem heliocentrischen Orte der Erde gehörenden Grössen aber mit L P R X Y Z und endlich die zu dem geocentrischen Orte des Planeten gehörenden Grössen durch $\lambda \pi \rho \xi v \zeta$ bezeichnen. Die Projectionen der Distanzen r R ρ auf die Ecliptik wollen wir durch d D δ anzeigen, und endlich dieselben zu einer zweyten oder dritten Beobachtung gehörenden Grössen mit einem oder zwey Strichen unterscheiden. Die Grössen θ θ' und θ'' sollen nach der Ordnung die Zwischenzeiten zwischen der 2. und 3., zwischen der 1. und 3. und zwischen der 1. und 2. Beobachtung seyn.

2. §. Da alle diese Bahnen in Ebenen liegen, welche durch den Mittelpunct der Sonne gehen, so hat man für die Gleichung dieser Ebene, wenn der Anfang der heliocentrischen Coordinaten im Mittelpuncte der Sonne liegt,

$$z = Ax + By$$

und eben so für die zweyte und dritte Beobachtung

$$z' = Ax' + By' \text{ und } z'' = Ax'' + By''.$$

Eliminirt man daraus die Grössen A und B, so erhält man

$$o = x(y''z' - y'z'') - x'(y''z - yz'') + x''(y'z - yz'),$$

welche Gleichung also ausdrückt, dass die Bahn des Planeten in einer durch den Mittelpunct der Sonne gehenden Ebene liegt. Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$o = y(x'z'' - x''z') - y'(xz'' - x''z) + y''(xz' - x'z)$$
$$o = z(x''y' - x'y'') - z'(x''y - xy'') + z''(x'y - xy').$$

I. Sind aber f'' f' f die Flächen der ebenen Dreyecke, welche zwischen dem Mittelpuncte der Sonne, den Radien $r\,r'\,r''$ und den geradlinigen Sehnen in der 1. 2., in der 1. 3. und in der 2. 3. Beobachtung enthalten sind, und nennt man $a\,b\,c$ die Neigung der Ebene der Bahn gegen die drey coordinirten Ebenen der yz, xz und xy, so hat man für die Projection des Dreyeckes f'' in denselben drey Ebenen

$$f''\,\mathrm{Cos}\,a = \tfrac{1}{2}(y'z - yz')$$
$$f''\,\mathrm{Cos}\,b = \tfrac{1}{2}(xz' - x'z)$$
$$f''\,\mathrm{Cos}\,c = \tfrac{1}{2}(x'y - xy')$$

und ähnliche Ausdrücke erhält man auch für $f'\,\mathrm{Cos}\,a$ . . . und $f\,\mathrm{Cos}\,a$ . . . Substituirt man sie in den vorhergehenden drey Gleichungen, so ist

$$\left.\begin{aligned} o &= fx - f'x' + f''x'' \\ o &= fy - f'y' + f''y'' \\ o &= fz - f'z' + f''z'' \end{aligned}\right\}$$

und wenn man eben so F'' F' und F die Flächen der geradlinigen Dreyecke zwischen dem Mittelpuncte der Sonne und den drey Orten der Erde in der 1. 2., in der 1. 3. und in der 2. 3. Beobachtung nennt, so ist eben so

$$\left.\begin{aligned} o &= FX - F'X' + F''X'' \\ o &= FY - F'Y' + F''Y'' \\ o &= FZ - F'Z' + F''Z'' \end{aligned}\right\}.$$

II. Es ist aber $x = \xi + X = \delta \operatorname{Cos} \lambda + D \operatorname{Cos} L$

$$y = \upsilon + Y = \delta \operatorname{Sin} \lambda + D \operatorname{Sin} L$$

$$z = \zeta + Z = \delta \operatorname{Cotg} \pi + D \operatorname{Cotg} P$$

und eben so für x', x'' u. f. Substituirt man diese Ausdrücke in den zwey letzten Systemen von (I) und setzt, da die Erde sich in der Ebene der Ecliptik bewegt, $P = 90$, so erhält man für den Planeten

$$\left.\begin{array}{l} o = f(\delta \operatorname{Cos} \lambda + D \operatorname{Cos} L) - f'(\delta' \operatorname{Cos} \lambda' + D' \operatorname{Cos} L') \\ \qquad + f''(\delta'' \operatorname{Cos} \lambda'' + D'' \operatorname{Cos} L'') \\ o = f(\delta \operatorname{Sin} \lambda + D \operatorname{Sin} L) - f'(\delta' \operatorname{Sin} \lambda' + D' \operatorname{Sin} L') \\ \qquad + f''(\delta'' \operatorname{Sin} \lambda'' + D'' \operatorname{Sin} L'') \\ o = f.\delta \operatorname{Cotg} \pi - f'.\delta' \operatorname{Cotg} \pi' + f''.\delta'' \operatorname{Cotg} \pi'' \end{array}\right\} \ldots (A)$$

und eben so für die Erde

$$\left.\begin{array}{l} o = F.D \operatorname{Cos} L - F'D' \operatorname{Cos} L' + F''D'' \operatorname{Cos} L'' \\ o = F.D \operatorname{Sin} L - F'D' \operatorname{Sin} L' + F''D'' \operatorname{Sin} L'' \end{array}\right\} \ldots (B)$$

III. Der Abkürzungen wegen wollen wir nun folgende Bezeichnungen einführen

$$\alpha = \operatorname{Cotg} \pi \operatorname{Sin} (\lambda'' - \lambda') - \operatorname{Cotg} \pi' \operatorname{Sin} (\lambda'' - \lambda) + \operatorname{Cotg} \pi'' \operatorname{Sin} (\lambda' - \lambda) \text{ und}$$

$$A = \operatorname{Cotg} \pi' \operatorname{Sin} (L - \lambda'') - \operatorname{Cotg} \pi'' \operatorname{Sin} (L - \lambda')$$

$$B = \operatorname{Cotg} \pi'' \operatorname{Sin} (L - \lambda) - \operatorname{Cotg} \pi \operatorname{Sin} (L - \lambda'')$$

$$C = \operatorname{Cotg} \pi \operatorname{Sin} (L - \lambda') - \operatorname{Cotg} \pi' \operatorname{Sin} (L - \lambda)$$

und geht in diesen drey letzten Ausdrücken

L über in L' so soll $A\,B\,C$ übergehen in $A'\,B'\,C'$

L - - - L'' - - - $A\,B\,C$ - - - - - - - - $A''B''\,C''$.

Dieses vorausgesetzt, multiplicire man von den Gleichungen (A) die erste durch $(\operatorname{Sin} \lambda' \operatorname{Cotg} \pi'' - \operatorname{Sin} \lambda'' \operatorname{Cotg} \pi')$, die zweyte durch $(\operatorname{Cos} \lambda'' \operatorname{Cotg} \pi' - \operatorname{Cos} \lambda' \operatorname{Cotg} \pi'')$ und die dritte durch $(\operatorname{Cos} \lambda' \operatorname{Sin} \lambda'' - \operatorname{Cos} \lambda'' \operatorname{Sin} \lambda')$, so gibt die Summe dieser drey Producte

$$o = f(a\delta + AD) - f'.A'D' + f''.A''D''$$

und eben so erhält man

$$o = f.BD - f'(a\delta' + B'D') + f''.B''D''$$

$$o = f.CD - f'.C'D' + f''(a\delta'' + C''D'')$$

(C)

und von diesen drey Gleichungen geben z. B. die beyden ersten

$$\frac{\delta}{\delta'} = -\frac{A'f'}{B'f} + \frac{(B'A - BA')Df + (B'A'' - B''A')D''f''}{B'(BDf - B'D'f' + B''D''f'')} \cdot \frac{f'}{f};$$

und ähnliche Ausdrücke erhält man auch für $\frac{\delta'}{\delta''}$ und $\frac{\delta''}{\delta}$.

3. §. Ehe wir weiter gehen, wollen wir zuerst den gefundenen Werth von $\frac{\delta}{\delta'}$ näher untersuchen.

Da das Problem, dessen Betrachtung uns hier beschäftiget, für den gegenwärtigen Zustand unserer Analysis zu schwer ist, um eine ganz strenge und directe Auflösung desselben zu unternehmen, so müssen wir durch irgend eine der Sache angemessene Voraussetzung diese Auflösung zu erleichtern suchen. Eine solche Erleichterung besteht darin, dass wir die zwey Zwischenzeiten der drey Beobachtungen, oder vielmehr die während diesen Zwischenzeiten durchlaufenen Bogen $\lambda'' - \lambda'$ und $\lambda' - \lambda$ sehr klein annehmen. Setzen wir voraus, dass diese Grössen $\lambda'' - \lambda'$, $\lambda' - \lambda$, also auch die ihnen entsprechenden Grössen $L'' - L'$, $L' - L$ der ersten Ordnung seyen, und suchen wir nun, welcher Ordnung die Grössen α, A, B, C, ... und $(AB' - A'B)$, $(A''B' - A'B'')$.... seyn werden.

I. Sind XYZ die rechtwinkligen Coordinaten eines ersten, $\xi'\,\upsilon'\,\zeta'$ eines zweyten und $\xi''\,\upsilon''\,\zeta''$ eines dritten Punctes im Raume, so ist bekanntlich der sechsfache körperliche Inhalt der Pyramide, welche zwischen diesen drey Puncten und dem gemeinschaftlichen Anfangspuncte dieser Coordinaten enthalten ist,

$$6P = \zeta'(Y\xi'' - X\upsilon'') - \zeta''(Y\xi' - X\upsilon') + Z(\xi'\upsilon'' - \xi''\upsilon')$$

und wenn der erste dieser drey Puncte in der Ebene der XY liegt, so ist $Z = 0$ oder

$$6P = \zeta'(Y\xi'' - X\upsilon'') - \zeta''(Y\xi' - X\upsilon').$$

Substituirt man aber die Werthe

$$\begin{array}{ll} \xi = \delta \operatorname{Cos} \lambda \text{ und} & X = D \operatorname{Cos} L \\ \upsilon = \delta \operatorname{Sin} \lambda & Y = D \operatorname{Sin} L \\ \zeta = \delta \operatorname{Cotg} \pi & Z = D \operatorname{Cotg} P = 0 \end{array}$$

in dem vorhergehenden Ausdrucke von A, so erhält man

$$A = \frac{\zeta'(Y\xi'' - X\upsilon'') - \zeta''(Y\xi' - X\upsilon')}{\delta'\delta''D} = \frac{\zeta'(Y\xi'' - X\upsilon'') - \zeta''(Y\xi' - X\upsilon')}{\rho'\rho''R \,.\, \operatorname{Sin}\pi' \operatorname{Sin}\pi'' \operatorname{Sin} P}$$

oder endlich, wenn man $\rho' = \rho'' = R = 1$ annimmt,

$$A.\operatorname{Sin}\pi'\operatorname{Sin}\pi''\operatorname{Sin}P = z(Y\xi'' - X\nu'') - z''(Y\xi' - X\nu').$$

Daraus folgt, dass jede der oben eingeführten Grössen A, B, C, A' . . . multiplicirt in die Sinus der drey in ihr enthaltenen Poldistanzen gleich ist dem sechsfachen Volum der Pyramide, deren Scheitel im Mittelpuncte der Sonne, und deren Basis das Dreyeck ist, welches die drey in ihr enthaltenen Orte des Planeten und der Erde an der Sphäre des Himmels bilden, wenn man die Halbmesser dieser Sphäre gleich der Einheit nimmt. So ist also $A \operatorname{Sin}\pi' \operatorname{Sin}\pi'' \operatorname{Sin} P$ gleich dem sechsfachen Volum der Pyramide zwischen der Sonne, der Erde in der I. und dem Planeten in der II. und III. Beobachtung; $B \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\pi'' \operatorname{Sin} P$ das sechsfache Volum der Pyramide zwischen der Sonne, der Erde in der I. und dem Planeten in der I. und III. Beobachtung u. f.; und eben so ist endlich auch $\alpha \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\pi' \operatorname{Sin}\pi''$ das sechsfache Volum der Pyramide zwischen der Sonne und dem Planeten in der I. II. und III. Beobachtung.

Da wir nun $\lambda'' - \lambda'$, $\lambda' - \lambda$, $L'' - L'$ . . . als die Grössen der ersten Ordnung angenommen haben, so folgt, dass auch die Grössen A, B, C, A' . . . als Grössen der ersten Ordnung zu betrachten seyn werden, während die Grösse α im Allgemeinen eine Grösse der dritten Ordnung vorstellt.

II. Um nun auch zu sehen, zu welcher Ordnung die Ausdrücke $(AB' - A'B)$ zu zählen sind, so findet man durch Substitution

$$AB' - A'B = \operatorname{Cotg}\pi''.\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Cotg}\pi \operatorname{Sin}(L' - L)\operatorname{Sin}(\lambda'' - \lambda') \\ - \operatorname{Cotg}\pi' \operatorname{Sin}(L' - L)\operatorname{Sin}(\lambda'' - \lambda) \\ + \operatorname{Cotg}\pi'' \operatorname{Sin}(L' - L)\operatorname{Sin}(\lambda' - \lambda)\end{array}\right\}$$

oder

$$AB' - A'B = \alpha \operatorname{Cotg}\pi \operatorname{Sin}(L' - L),$$

oder da α der dritten und $L' - L$ der ersten Ordnung ist, so muss der Ausdruck $(AB' - A'B)$ und eben so $(A''B' - A'B'')$ . . . zu der vierten Ordnung gezählt werden.

III. Nach dem S. 54 angeführten Gesetze bewegen sich alle Körper unseres Sonnensystems so, dass ihre Radii Vectores in gleichen Zeiten gleiche Räume oder gleiche elliptische Sectoren beschreiben. Sind aber, der obigen Voraus-

setzung gemäss, die Zwischenzeiten der drey Beobachtungen nur klein, so wird man annähernd annehmen können, dass nicht die elliptischen Sectoren, sondern dass die Flächen der ebenen Dreyecke f f′ f″, welche zwischen diesen Radien und den geradlinigen Sehnen enthalten sind, den Zeiten proportional beschrieben werden, oder dass man hat

$$\frac{f''}{f} = \frac{\theta''}{\theta}, \ \frac{f'}{f} = \frac{\theta'}{\theta} \text{ und } \frac{f''}{f'} = \frac{\theta''}{\theta'} .$$

Sehen wir nun zu, welche Folgen diese bloss genäherten Werthe von $\frac{f''}{f}$ und $\frac{f'}{f}$ auf die daraus zu findenden Werthe von δ, δ' und δ'' haben können.

IV. Substituirt man diese Ausdrücke von $\frac{f'}{f}$ und $\frac{f''}{f}$ in der ersten der Gleichungen (C), so erhält man

$$\delta = \frac{\theta'}{\theta} \cdot \frac{A'D'}{\alpha} - \frac{\theta''}{\theta} \cdot \frac{A''D''}{\alpha} - \frac{AD}{\alpha};$$

und da in dieser Gleichung, ausser δ, alles bekannt ist, so könnte man aus ihr den Werth von δ, und eben so aus den beyden andern Gleichungen (C) die Werthe von δ' und δ'' finden, wodurch allerdings schon sehr viel für die Auflösung unserer Aufgabe gewonnen wäre. Allein wir haben oben gesehen, dass die Grössen A′, A″ . . der ersten, und α der dritten Ordnung ist. Wenn daher die bloss genäherten Werthe von $\frac{\theta'}{\theta}$ und $\frac{\theta'}{\theta}$ auch nur einen Fehler der zweyten Ordnung enthalten, so entstehen daraus, wie die letzte Gleichung zeigt, für die Grösse δ viel grössere Fehler der Ordnung Null, so dass, wenn der Fehler in $\frac{\theta'}{\theta}$ oder $\frac{\theta''}{\theta}$ auch nur z. B. als ein Differential der zweyten Ordnung angesehen werden kann, doch der daraus entspringende Fehler in δ schon als eine endliche Grösse betrachtet werden muss. Da sonach die Fehler der Hypothese in den daraus zu suchenden Werthen von δ s e h r v e r g r ö s s e r t erscheinen, so sind diese Gleichungen (C) zur genauern Bestimmung der Grössen δ, δ' und δ'' eigentlich nicht mit Vortheil anwendbar.

V. Anders aber verhält sich diese Sache, wenn man aus diesen Gleichungen (C) nur die Verhältnisse der drey Grössen δ, δ', δ'' abzuleiten sucht. So gibt die erste dieser Gleichungen, durch die zweyte dividirt, den schon oben angeführten Ausdruck

$$\frac{\delta}{\delta'} = -\frac{A'f'}{B'f} + \frac{(AB'-A'B)Df + (A''B'-A'B'')D''f''}{B'(BDf - B'D'f' + B''D''f'')} \cdot \frac{f'}{f}.$$

Da aber nach dem Vorhergehenden die Grössen BB', $B'B'$, $B'B''$ der zweyten, und $(AB'-A'B)$, $(A''B'-A'B'')$ der vierten Ordnung sind, so wird, wenn man in der Substitution von $\frac{\theta''}{\theta}$ und $\frac{\theta'}{\theta}$ statt $\frac{f''}{f}$ und $\frac{f'}{f}$ selbst einen Fehler der ersten Ordnung begeht, der Ausdruck

$$\frac{(AB'-A'B)D\theta + (A''B'-A'B'')D''\theta''}{B'(BD\theta - B'D'\theta' + B''D''\theta'')} \cdot \frac{\theta'}{\theta}$$

nur noch um eine Grösse der dritten Ordnung fehlerhaft seyn, während $\frac{A'\theta'}{B'\theta}$ um eine Grösse der ersten Ordnung fehlerhaft ist, so dass man daher in der vorhergehenden Gleichung den letzten Theil derselben, bey einer ersten Annäherung, ganz weglassen kann, ohne dass dadurch der Fehler der Hypothese in dem daraus geschlossenen Werth von $\frac{\delta}{\delta''}$ vergrössert wird. Wir haben daher zur ersten Bestimmung der Verhältnisse der Werthe von δ, δ' und δ'' die unserem Zwecke sehr angemessenen einfachen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta'} &= -\frac{A'f'}{B'f} \\ \frac{\delta'}{\delta''} &= -\frac{B'f''}{C'f'} \\ \frac{\delta''}{\delta} &= +\frac{C'f}{A'f''} \end{aligned}\right\} \ldots (D)$$

in welchen man in einer ersten Näherung

$$\frac{f'}{f} = \frac{\theta'}{\theta} \text{ und } \frac{f''}{f'} = \frac{\theta''}{\theta'}$$

setzen wird.

VI. Noch muss bemerkt werden, dass man an den Grössen $f\,f'\,f''$, wenn bereits der Radius Vector r' der mittleren

Beobachtung gegeben ist, eine kleine Verbesserung anbringen kann.

Ist nämlich $\mu = 0.0172021$ (S. 63), so hat man nach den ersten Gründen der Mechanik

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{\mu^2 x'}{r'^3} = 0 \text{ und } \frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{\mu^2 y'}{r'^3} = 0,$$

wo dt das Element der Zeit bezeichnet. Allein nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist auch

$$x = x' - \theta''. \frac{dx'}{dt} + \frac{\theta''^2}{1.2}. \frac{d^2 x'}{dt^2} - \text{ und}$$

$$x'' = x' + \theta. \frac{dx'}{dt} + \frac{\theta^2}{1.2}. \frac{d^2 x'}{dt^2} +$$

mit den analogen Ausdrücken für $y\,y''$ und $z\,z''$.

Ist also, wie zuvor, c die Neigung der Ebene der Bahn gegen die Ebene der x y, so hat man

$$\left.\begin{aligned} 2f \operatorname{Cos} c &= x''y' - x'y'' = \frac{k\theta}{dt}\left(1 - \frac{\mu^2\theta^2}{6r'^3}\right) \\ \text{und eben so} \\ 2f' \operatorname{Cos} c &= x''y - xy'' = \frac{k}{dt}\left(1 - \frac{\mu^2\theta'^2}{6r'^3}\right) \\ 2f'' \operatorname{Cos} c &= x'y - xy' = \frac{k\theta''}{dt}\left(1 - \frac{\mu^2\theta''^2}{6r'^3}\right) \end{aligned}\right\} (E)$$

wo $k = y'dx' - x'dy'$ ist.

4. §. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun die Auflösung unserer Aufgabe vornehmen, und dazu die zweyte der Gleichungen (C) benützen. Diese ist

$$\alpha f'\delta' = BfD - B'f'D' + B''f''D''.$$

Analog mit diesem Ausdrucke hat man auch für die drey Orte der Erde

$$0 = BFD - B'F'D' + B''F''D''.$$

Nimmt man dabey auch auf die Gleichungen (E) Rücksicht, so werden von den beyden vorhergehenden Ausdrücken der erste

$$\alpha = -\frac{B'D'}{\delta'} + \frac{BD\theta + B''D''\theta''}{\theta'\delta'}\left(1 + \frac{\mu^2\theta\theta''}{2r'^3}\right);$$

und da auch

$$2F \operatorname{Cos} c = \frac{k\theta}{dt}\left(1 - \frac{\mu^2\theta^2}{6R'^3}\right) \text{ ist,}$$

so ist auch annähernd der zweyte jener Ausdrücke

$$0 = B D \theta + B'' D'' \theta'' - B' D' \theta' \left(1 - \frac{\mu^2 \theta \theta''}{2 R'^3}\right).$$

I. Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Grösse $B D \theta + B'' D'' \theta''$ und lässt man die höheren Potenzen von μ^2 weg, so erhält man

$$\frac{2\alpha}{\mu^2 \theta \theta'' B'} + \left(\frac{1}{D'^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \frac{D'}{\delta'} = 0 \ldots .$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit dem bekannten

$$r'^2 = D'^2 + \delta'^2 \operatorname{Cosec}^2 \pi' + 2 D' \delta' \operatorname{Cos} (L' - \lambda') \ldots .$$

so wird man aus diesen beyden Gleichungen die zwey in ihnen enthaltenen unbekannten Grössen r' und δ' finden können, und dann ist nach den Gleichungen (D)

$$\delta = - \frac{A' \theta'}{B' \theta} \cdot \delta' \text{ und}$$

$$\delta'' = - \frac{C' \theta'}{B' \theta''} \cdot \delta'.$$

II. Kennt man aber δ und δ'', so kennt man auch r und r'', so wie die Coordinaten $x y z$ und $x'' y'' z''$, welche den heliocentrischen Ort des Planeten in der ersten und dritten Beobachtung angeben. Es ist nämlich

$$r^2 = D^2 + \delta^2 \operatorname{Cosec}^2 \pi + 2 D \delta \operatorname{Cos} (L - \lambda)$$
$$r''^2 = D''^2 + \delta''^2 \operatorname{Cosec}^2 \pi'' + 2 D'' \delta'' \operatorname{Cos} (L'' - \lambda'')$$

$$x = \delta \operatorname{Cos} \lambda + D \operatorname{Cos} L \quad \text{und} \quad x'' = \delta'' \operatorname{Cos} \lambda'' + D'' \operatorname{Cos} L''$$
$$y = \delta \operatorname{Sin} \lambda + D \operatorname{Sin} L \qquad y'' = \delta'' \operatorname{Sin} \lambda'' + D'' \operatorname{Sin} L''$$
$$z = \delta \operatorname{Cotg} \pi \qquad z'' = \delta'' \operatorname{Cotg} \pi''.$$

III. Kennt man aber diese Grössen, so wird man auch die Neigung n der Bahn gegen die Ecliptik, die Länge ☊ ihres aufsteigenden Knotens und endlich die Differenz $(u'' - u)$ der beyden heliocentrischen Längen des Planeten in der Bahn, oder, was dasselbe ist, die Differenz der wahren Anomalien oder auch der beyden Argumente der Breiten (S. 115) finden können. Es ist nämlich, wie man leich sieht,

$$x = r \operatorname{Cos} u \operatorname{Cos} ☊ - r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} ☊$$
$$y = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} n \operatorname{Cos} ☊ + r \operatorname{Cos} u \operatorname{Sin} ☊ \text{ und}$$
$$z = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n.$$

Entwickelt man die ähnlichen Ausdrücke von $x'' y'' z''$ in der zweyten Beobachtung, so erhält man nach einigen leichten Transformationen

$$y z'' - y'' z = r r'' \text{Sin}(u'' - u) \text{Sin}\, n \text{ Sin}\, \Omega$$
$$x z'' - x'' z = r r'' \text{Sin}(u'' - u) \text{Sin}\, n \text{ Cos}\, \Omega$$
$$x y'' - x'' y = r r'' \text{Sin}(u'' - u) \text{Cos}\, n.$$

Die zwey ersten dieser Gleichungen geben die Grösse Ω und $r r'' \text{Sin}(u'' - u) \text{Sin}\, n$, also auch, da $r r''$ schon bekannt ist, die Grösse $\text{Sin}(u'' - u) \text{Sin}\, n$, und die dritte Gleichung gibt $\text{Sin}(u'' - u) \text{Cos}\, n$, also findet man aus ihnen die drey Grössen $(u'' - u)$, Ω und n.

5. §. Wir sind also durch das Vorhergehende in den Stand gesetzt, aus blossen Beobachtungen von drey geocentrischen Längen und Poldistanzen eines Planeten die Radii Vectores r und r'', und die Differenz der wahren Anomalien $u'' - u$ der ersten und dritten Beobachtung wenigstens annähernd zu finden.

Um aber aus diesen drey Stücken, verbunden mit der Zwischenzeit $\theta' = t$ der Beobachtungen, die elliptischen Elemente abzuleiten (denn die beyden bereits gefundenen Elemente n und Ω beziehen sich nur auf die Lage der Ebene der Bahn), wollen wir zuerst die Differenz der beyden excentrischen Anomalien, die wir e und e'' nennen, suchen.

Sey die bekannte Grösse $\frac{u'' - u}{2} = h$ und die unbekannte $\frac{e'' - e}{2} = g$.

Ist aber, wie S. 56, a die halbe grosse Axe und $a\varepsilon$ die Excentricität der Bahn, so ist

$$r = a(1 - \varepsilon \text{Cos}\, e);$$

also auch

$$r'' + r = 2a\left(1 - \varepsilon \text{Cos} \frac{e'' + e}{2} \text{Cos}\, g\right).$$

Aus den Gleichungen S. 56 findet man aber, wenn v die wahre Anomalie bezeichnet,

$$\text{Sin} \frac{v}{2} = \text{Sin} \frac{e}{2} \sqrt{\frac{a(1 + \varepsilon)}{r}} \text{ und}$$
$$\text{Cos} \frac{v}{2} = \text{Cos} \frac{e}{2} \sqrt{\frac{a(1 - \varepsilon)}{r}},$$

also ist auch, da $h = \frac{u'' - u}{2} = \frac{v'' - v}{2}$ ist,

$$\text{Cos}\, h = \text{Cos}\, \frac{v''}{2}\, \text{Cos}\, \frac{v}{2} + \text{Sin}\, \frac{v''}{2}\, \text{Sin}\, \frac{v}{2} \text{ oder}$$

$$\frac{\text{Cos}\, h \,.\, \sqrt{r\, r''}}{a} = \text{Cos}\, g - \varepsilon\, \text{Cos}\, \frac{e'' + e}{2} \quad . \quad . \quad (\text{I}).$$

Substituirt man diesen Werth von $\varepsilon\, \text{Cos}\, \frac{e'' + e}{2}$ in der vorhergehenden Gleichung, so ist

$$\text{Cos}\, g = \frac{\text{Cos}\, h \,.\, \sqrt{r\, r''} \pm \sqrt{r\, r''\, \text{Cos}^2 h + 2\, a\, (2\, a - r - r'')}}{2\, a} \text{ oder}$$

$$a = \frac{r + r'' - 2\, \text{Cos}\, h\, \text{Cos}\, g \,.\, \sqrt{r\, r''}}{2\, \text{Sin}^2 g} \quad . \quad . \quad (\text{II})$$

Ist aber t die Zwischenzeit zwischen der ersten und letzten Beobachtung und $\mu = 0.0172021$, so ist (S. 56)

$$\frac{\mu\, t}{a^{\frac{3}{2}}} = e'' - e - \varepsilon\, (\text{Sin}\, e'' - \text{Sin}\, e) \text{ oder}$$

$$\frac{\mu\, t}{a^{\frac{3}{2}}} = 2\, g - 2\, \varepsilon\, \text{Sin}\, g\, \text{Cos}\, \frac{e'' + e}{2},$$

oder, wenn man in dieser Gleichung den Werth von

$$\varepsilon\, \text{Cos}\, \frac{e'' + e}{2}$$

aus (I) substituirt,

$$\frac{\mu\, t}{a^{\frac{3}{2}}} = 2\, g - \text{Sin}\, 2\, g + 2\, \text{Cos}\, h\, \text{Sin}\, g \,.\, \sqrt{\frac{r\, r''}{a^2}},$$

oder endlich, wenn man auch hier den Werth der Grösse a aus (II) substituirt,

$$m = \left(l + \text{Sin}^2 \frac{g}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(l + \text{Sin}^2 \frac{g}{2}\right)^{\frac{3}{2}} . \left(\frac{2\, g - \text{Sin}\, 2\, g}{\text{Sin}^3 g}\right) . \; . \; (\text{III})$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$1 + 2\, l = \frac{\sqrt{\frac{r''}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r''}}}{2\, \text{Cos}\, h} \text{ und } m = \frac{\mu\, t}{(2\, \text{Cos}\, h \,.\, \sqrt{r\, r''})^{\frac{3}{2}}}.$$

I. Die Gleichung (III) enthält bloss die unbekannte Grösse $g = \frac{e'' - e}{2}$, und kann daher zur Bestimmung derselben dienen. Um dieses bequemer zu thun, sey $x = \text{Sin}^2 \frac{1}{2} g$, also die Gleichung (III)

$$m = (1+x)^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}\right).$$

Man setze $X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$, so ist, wenn man diesen Ausdruck differentiirt,

$$2(x - x^2)\frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x)X$$

Setzt man also $X = \frac{4}{3}(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots)$, so erhält man, wenn man diesen Werth von X und sein Differential in der letzten Gleichung substituirt, und die Factoren der gleichen Potenzen von x gleich Null setzt,

$$\alpha = \frac{6}{5}, \beta = \frac{8\alpha}{7}, \gamma = \frac{10\beta}{9}, \delta = \frac{12\gamma}{11} \ldots$$

also auch

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6x}{3 . 5} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8x^2}{3 . 5 . 7} + \frac{4 . 6 . 8 . 10x^3}{3 . 5 . 7 \cdot 9} +$$

Setzt man daher wieder

$$X = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}, \text{ so hat man}$$

$$\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{10}{9X};$$

und aus diesem letzten Ausdrucke wird man für jeden kleinen Werth von x die Grösse ξ leicht finden. Substituirt man nämlich in ihm den vorhergehenden Werth von X, so erhält man, wenn man die fünften und höhern Potenzen von x weglässt,

$$\xi = 0.057143x^2 + 0.033016x^3 + 0.020542x^4 \ldots \text{(III)}$$

Unsere vorhergehende Gleichung ist aber

$$m = (1+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}.$$

Setzt man also

$$\frac{m}{y} = \sqrt{1+x} \text{ und } Q = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + 1 + \xi},$$

so wird jene Gleichung

$$Q = \frac{(y-1)y^2}{\frac{1}{9} + y}.$$

II. Um daher die Grösse $x = \mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} g = \mathrm{Sin}^2 \frac{e'' - e}{4}$ zu finden, wird man so verfahren:

Da ξ immer nur sehr klein ist, so vernachlässige man in einer ersten Näherung diese Grösse ξ gänzlich und setze

$$Q = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l};$$

dann suche man y aus der Gleichung

$$Q = \frac{(y - 1) y^2}{\frac{1}{9} + y} \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{und } x \text{ aus } x = \frac{m^2}{y^2} - l \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Mit diesem Werthe von x suche man ξ aus

$$\xi = 0.057143 x^2 + 0.033016 x^3 + 0.020542 x^4 \quad . \quad . \quad (3)$$

und damit wieder Q aus $Q = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi}$ . . . (4)

und damit wieder y aus (1) und x aus (2), wodurch man ein verbessertes ξ aus (3) erhält, mit welchem man wieder Q aus (4) und y aus (1), x aus (2) . . erhält, welches Verfahren man so lange fortsetzen wird, bis der neue Werth von ξ von dem unmittelbar vorhergehenden nicht weiter verschieden ist. Kennt man so endlich den wahren Werth von x, so ist auch g aus der Gleichung $x = \mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} g$ bekannt.

Die Auflösung der kubischen Gleichung (1) zu erleichtern, kann man, wenn man einen ersten genäherten Werth von y kennt, aus der Gleichung (1) den Werth von Q für zwey angenommene Werthe von y suchen, zwischen welche jener erste genäherte Werth von y fällt.

Um dieses durch ein Beyspiel deutlich zu machen sey
$h = 31° 27' 38''.32$, $\log r = 0.4282792$, $\log r'' = 0.4062033$
und $t = 259.88477$ Tage, so ist
$\log m^2 = 9.3530651$ und $l = 0.08635659$.

Damit erhält man den ersten genäherten Werth von Q

$$Q = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l} = 0.2451451;$$

also auch aus (1) . . $\log y^2 = 0.1722683$
(2) . . . $x = 0.0652775$
(3) . . . $\xi = 0.0002531$
(4) . . . $Q = 0.2450779$;

und mit dem letzten Werthe von Q wieder

$$\text{aus } (1) \ldots \log y^2 = 0.1722303$$
$$(2) \ldots \quad x = 0.06529078$$
$$(3) \ldots \quad \xi = 0.0002532$$

und da dieser Werth von ξ von dem vorhergehenden nicht mehr verschieden ist, so ist $x = \mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} g = 0.06529078$.

Die oben erwähnten zwey Werthe von Q sind hier

Q	$\log y^2$
0.245	0.1721887
0.246	0.1727218

wodurch die Auflösung der Gleichung (1) sehr erleichtert wird.

6. §. Nachdem nun so die Grösse $g = \frac{e' - e}{2}$ gefunden ist, hat die Bestimmung der elliptischen Elemente keine weitere Schwierigkeit.

Man findet nämlich die halbe grosse Axe a aus der Gleichung (II) oder aus

$$a = \frac{2 (1 + \mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} g) \,\mathrm{Cos}\, h \,.\, \sqrt{r r''}}{\mathrm{Sin}^2 g}.$$

Den halben Parameter p findet man aus

$$\sqrt{p} = \frac{r r'' . y . \mathrm{Sin}\, 2h}{\mu t},$$

und die Excentricität ε aus $\varepsilon^2 = 1 - \frac{p}{a}$.

Aus den Gleichungen S. 56 erhält man

$$\mathrm{tg}\, \frac{v'' + v}{2} = \frac{(r'' - r)\, \mathrm{Sin}\, h}{2 \,\mathrm{Cos}\, g \,.\, \sqrt{r r''} - (r + r'')\, \mathrm{Cos}\, h};$$

und da man schon $h = \frac{v'' - v}{2}$ kennt, so kennt man auch die beyden wahren Anomalien v und v'', und daher auch die Länge Π des Periheliums.

Aus den Gleichungen des §. 4. III, erhält man nämlich das Argument der Breite u in der ersten Beobachtung durch

$$\mathrm{Sin}\, u = \frac{z}{r \,\mathrm{Sin}\, n},$$

oder wenn u nahe an 90° oder 270° ist, durch

$$\mathrm{Cos}\, u = \frac{x \,\mathrm{Cos}\, \Omega + y \,\mathrm{Sin}\, \Omega}{r},$$

und dann ist die Länge des Periheliums

$$\Pi = u - v + \Omega.$$

Die Grösse $\frac{e'' + e}{2}$ aber findet man aus der Gleichung

$$r'' - r = 2\, a\, \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, g \,\mathrm{Sin}\, \frac{e'' + e}{2};$$

und da man bereits $g = \frac{e'' - e}{2}$ kennt, so kennt man auch e und e″.

Endlich ist die mittlere siderische Bewegung während der Zeit t gleich $\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}}$, und die mittleren Anomalien des Planeten in den beyden Beobachtungen

$$M = e - \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, e \text{ und } M'' = e'' - \varepsilon \,\mathrm{Sin}\, e'',$$

deren Differenz daher ebenfalls gleich $\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}}$ seyn muss.

In unserem Exempel findet man

$\log a = 0.4424661$	$\log p = 0.4396235$
$\varepsilon = 0.080768$	$\Pi = 146° \, 0' \, 53''.6$
$v = 289° \, 7' \, 39''.75$	$v'' = 352° \, 2' \, 56''.39$
$M = 297° \, 41' \, 35''.65$	$M'' = 355° \, 15' \, 22''.49$

und die tägliche siderische mittlere Bewegung

$$\frac{\mu}{a^{\frac{3}{2}}} = 769'',6755.$$

7. §. Die vorhergehende Auflösung kann nicht als eine ganz genaue gelten, weil ihr die anfängliche bloss genäherte Bestimmung von r′ und δ′ aus den beyden Gleichungen des §. 4. I zu Grunde liegt.

In der Ausübung, wo man von einem neu entdeckten Himmelskörper anfänglich bloss eine genäherte Kenntniss der Elemente sucht, wird man aber jene Auflösung meistens mit Vortheil anwenden können. Wer diesen Gegenstand weiter verfolgen und unter gewissen Bedingungen eine ganz strenge Auflösung des Problems kennen lernen will, wird sie in Gauss Theoria Mot. Corpor. coel. finden. Hier mag es hinreichen, den Gebrauch der vorhergehenden Ausdrücke durch ein vollständiges Beyspiel zu zeigen. Wählen wir dazu folgende drey Beobachtungen der Vesta.

1807	mittl. Zeit Paris	geoc. Länge	geoc. Poldistanz
24. April	$9^h\, 5'\, 16''.5$	$\lambda = 174^\circ\ 7'\ 53.2$	$\pi = 88^\circ\ 22'\ 35''.9$
29. April	8 43 42.2	$\lambda' = 173\ 44\ 21.3$	$\pi' = 88\ 40\ 17.4$
4. May	8 22 51.2	$\lambda'' = 173\ 33\ 33.0$	$\pi'' = 88\ 59\ 20.8$

Für diese Zeiten geben die Sonnentafeln wahre Länge der $\odot + 20''$.

$$L = 213^\circ\ 42'\ 55''.5 \qquad \log D = 0.0028540$$
$$L' = 218\ 33\ 22.4 \qquad \log D' = 0.0034240$$
$$L'' = 223\ 23\ 15.5 \qquad \log D'' = 0.0039670$$

und daher $\theta = 4.9855208$ Tage

$$\theta' = 9.9705405$$
$$\theta'' = 4.9850197$$

Damit findet man nach §. 3

$\log \alpha = 5.3424727$

$\log A = 7.6214048$, $\log B = 7.9368504^n$, $\log C = 7.6514234$

$\log A' = 7.6537430$, $\log B' = 7.9651452^n$, $\log C' = 7.6756959$

$\log A'' = 7.6808882$, $\log B'' = 7.9887417^n$, $\log C'' = 7.6956918$

Die beyden Gleichungen in §. 4, I. sind also

$$\frac{1}{D'^2\,\delta'} - \frac{D'}{r'^3\,\delta'} - 0.6483616 = 0$$

$$r'^2 - 1.0158930 - \overline{0.1553219}\,\delta' - \overline{0.0170896}\,\delta'^2,$$

wo die überstrichenen Zahlen schon Logarithmen sind.

Aus diesen Gleichungen findet man (nach S. 57)

$$\log r' = 0.3477013 \text{ und } \log \delta' = 0.1390755$$

und daher auch

$$\log \delta = 0.1286815 \text{ und } \log \delta'' = 0.1506780.$$

Weiter geben die Gleichungen des §. 4, II.

$$\log r = 0.34883 \qquad \log r'' = 0.34676$$
$$\log x = 0.33748^n \qquad \log x'' = 0.33025^n$$
$$\log y = 9.62437^n \qquad \log y'' = 9.72797^n$$
$$\log z = 9.44191 \qquad \log z'' = 9.43977$$

Die Gleichungen in §. 4, III. aber geben

$\log (y z'' - y'' z) = 8.50461$ also auch $\Omega = 102^\circ\ 18'\ 10''$

$\log (x z'' - x'' z) = 7.84323^n$ $\qquad n = 7^\circ\ 8'\ 15''$

$\log (x y'' - x'' y) = 9.41707$ $\qquad u'' - u = 3\ \ 2'\ 30''$

Hätte man auf diese drey Beobachtungen die oben er-

wähnte genauere Methode der Theor. Mot. Corp. coel. angewendet, so würde man gefunden haben

$\log r = 0.3480342$, also jene Bestimm. zu gross um 0.00080
$\log r'' = 0.3463612$ 0.00040
$u'' - u = 3° 2' 14''.8$ $0°. 0' 15''.2$

Suchen wir daher mit diesen verbesserten Angaben die elliptischen Elemente nach §. 5 und 6, so ist

$h = \frac{u'' - u}{2} = \frac{v'' - v}{2} = 1° 31' 7''.40$, $t = 9.9705405$ und daher (nach §. 5) $l = 0.0001766$, $\log m^2 = 6.5243749$ und (nach §. 5, II.) $Q = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l} = 0.000401295$

Die oben erwähnte kleine Tafel zwischen Q und y ist

Q	$\log y^2$
0.0003	0.0002894
0.0004	0.0003858
0.0005	0.0004821

so dass aus dem vorhergehenden Werthe von Q folgt

$$\log y^2 = 0.00038705,$$

$$x = \frac{m^2}{y^2} - l = 0.00015758,$$

welches nahe $\xi = 0$ gibt, so dass man hat

$$\log x = 6.1975011 = \log \sin^2 \tfrac{1}{2} g \text{ oder}$$

$$g = \frac{e' - e}{2} = 1° 26' 18''.66$$

Mit diesem Werthe von g findet man aus §. 6

$$\log a = 0.3726028$$
$$\log p = 0.3689094$$
$$\varepsilon = 0.0920261$$

$\frac{e'' + e}{2} = 308° 8' 27''.13$ also $e = 306° 42' 8''.47$
$e'' = 309\ 34\ 45.79$

$\frac{v'' + v}{2} = 303° 52' 0''.23$ also $v = 302° 20' 52''.83$
$v'' = 305\ 23\ 7.63$

Mittl. Anom. in der I. Beob. $M = 310° 55' 47''.105$
II. - - $M'' = 313\ 38\ 35.827$

Differenz $2°\ 42' 48''.722 = 9768''.722$

oder mittlere siderische Bewegung in der Zwischenzeit

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = 9768''.722.$$

Das Argument u der Breite in der ersten Beobachtung findet man aus $\text{Cos } u = \frac{x \text{ Cos } \Omega + y \text{ Sin } \Omega}{r}$, also mit dem vorigen Werthe von x, y, und Ω, da $\log r = 0.3480342$ ist,

$u = 88° 39' 40''$ und daraus die Länge des Periheliums

$\Pi = u - v + \Omega = 248° 36' 57''$.

Addirt man diese Länge des Perihels zur mittleren Anomalie M der ersten Beobachtung, so erhält man für die Zeit der ersten Beobachtung die mittlere Länge des Planeten in der Bahn oder die Epoche gleich

199° 32′ 44″ für 1807 April 24.3786631 mittl. Zeit Paris.

Wir haben daher folgende Elemente der Vesta:

mittl. Länge für 1807 April 24.37866 - - - - -	199° 32′ 44″
halbe grosse Axe a - - - - - - - - - - -	2.35832
halber Parameter p - - - - - - - - - - -	2.33835
Excentricität ε - - - - - - - - - - - - -	0.09203
Länge des Periheliums Π - - - - - - - - -	248° 36′ 57″
Länge des aufsteigenden Knotens Ω - - - - -	102 18 10
Neigung gegen die Ecliptik n - - - - - - -	7 8 15
tägliche tropische Bewegung - - - - - - - -	979″.896

8. §. Setzt man aber die Bahn des Körpers parabolisch voraus, so wird dadurch die Auflösung unseres Problems sehr erleichtert, da die Bestimmung der grossen Axe, die hier unendlich ist, wegfällt. Diese Voraussetzung ist, wenigstens in einer ersten Näherung, bey den meisten Kometen erlaubt, da ihre Bahnen gewöhnlich sehr excentrische Ellipsen sind, und da diese Körper, wegen ihres schwächern Lichtes, meistens nur in der Gegend ihrer Sonnennähe von uns gesehen oder beobachtet werden können. Nimmt man nämlich die Abscissen x von dem Perihelium auf der grossen Axe und nennt man p den halben Parameter der Bahn und a die halbe grosse Axe, so hat man bekanntlich für die Ellipse

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a},$$

und für die Parabel

$$y^2 = 2px.$$

Aus diesen beyden Gleichungen folgt, dass die Differenz der Quadrate der Ordinaten y in der Parabel und in der Ellipse gleich

$$\frac{p x^2}{a},$$

oder, wenn ε die Excentricität der Ellipse bezeichnet, gleich

$$(1 - \varepsilon^2)\, x^2$$

ist, und dass daher die Ellipse der Parabel für denselben Parameter um so näher kommt, je grösser die grosse Axe, und je grösser die Excentricität ε ist, und dass endlich dieser Übereinstimmung beyder Curven in der Nähe des Periheliums, wo x sehr klein ist, am grössten seyn wird.

I. Ehe wir aber an die Auflösung unserer Aufgabe gehen, wird es gut seyn, zuerst einige Ausdrücke der Parabel zu entwickeln, die uns bey jener Auflösung von Nutzen seyn werden.

Nennt man r den Radius Vector, v die wahre Anomalie vom Perihelium und p den halben Parameter der Parabel, so ist die Gleichung dieser Curve (S. 63)

$$r = \frac{p}{2 \operatorname{Cos}^2 \frac{v}{2}},$$

für eine zweyte Beobachtung ist also auch

$$r' = \frac{p}{2 \operatorname{Cos}^2 \frac{v'}{2}}.$$

Diese beyden Gleichungen geben sofort

$$\sqrt{\frac{r}{r'}} = \frac{\operatorname{Cos} \frac{v'}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{v}{2}} \text{ oder}$$

$$\sqrt{\frac{r}{r'}} = \operatorname{Cos} \frac{v' - v}{2} - \operatorname{Sin} \frac{v' - v}{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2},$$

oder, wenn man $\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \dfrac{\operatorname{Sin} \frac{v}{2}}{\sqrt{\frac{p}{2r}}}$ setzt,

$$\sqrt{\frac{2}{p}} \operatorname{Sin} \frac{v}{2} = \frac{\operatorname{Cotg} \frac{v' - v}{2}}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{v' - v}{2} \sqrt{r'}}.$$

Die erste Gleichung aber gibt

$$\sqrt{\frac{2}{p}} \cdot \operatorname{Cos} \frac{v}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}},$$

so dass man also durch die beyden letzten Ausdrücke die Grössen p und v finden kann, wenn man r, r′ und v′ — v kennt.

II. Für die Ellipse hat man, wenn u die excentrische Anomalie bezeichnet (S. 56)

$$\operatorname{Cos} v = \frac{a}{r} (\operatorname{Cos} u - \varepsilon) \text{ und } \operatorname{Sin} v = \frac{a}{r} \sqrt{1 - \varepsilon^2} . \operatorname{Sin} u ,$$

also auch

$$r r' \operatorname{Cos} (v - v') = a^2 (\varepsilon - \operatorname{Cos} u)(\varepsilon - \operatorname{Cos} u') + a^2 (1 - \varepsilon^2) \operatorname{Sin} u' \operatorname{Sin} u.$$

Nennt man aber k die geradlinige Sehne zwischen den Endpuncten der beyden Radien r und r′, so ist

$$k^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \operatorname{Cos} (v - v'), \text{ also auch}$$

$$k^2 = 4 a^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{u' - u}{2} \left(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2 \frac{u' + u}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \ (1)$$

Es ist aber (S. 63 und 141)

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = u - \varepsilon \operatorname{Sin} u , \text{ also auch}$$

$$\frac{\mu (t' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = u' - u - 2 \varepsilon \operatorname{Cos} \frac{u' + u}{2} \operatorname{Sin} \frac{u' - u}{2} \quad . \quad . \quad . \ (2)$$

Endlich ist $\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \operatorname{Cos} u$ oder

$$r' + r = 2 a - 2 a \varepsilon \operatorname{Cos} \frac{u' + u}{2} \operatorname{Cos} \frac{u' - u}{2},$$

das heisst, wenn man der Kürze wegen $\gamma = 2 a - r' - r$ setzt,

$$\varepsilon \operatorname{Cos} \frac{u' + u}{2} = \frac{\gamma}{2 a \operatorname{Cos} \frac{u' - u}{2}},$$

und wenn man diesen Werth von $\varepsilon \operatorname{Cos} \frac{u' + u}{2}$ in (1) und (2) substituirt, wo $\theta = t' - t$ die Zwischenzeit der beyden Beobachtungen ist,

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= 4 a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{u' - u}{2} \left[\operatorname{Cos}^2 \frac{u' - u}{2} - \frac{\gamma^2}{4 a^2} \right] \\ \frac{\mu \theta}{a^{\frac{3}{2}}} &= u' - u - \frac{\gamma}{a} \operatorname{tg} \frac{u' - u}{2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \ (3)$$

Es ist aber $\mathrm{tg}^2 \frac{u'-u}{2} = \frac{1-\mathrm{Cos}\,(u'-u)}{1+\mathrm{Cos}\,(u'-u)}$ und

$$\mathrm{Cos}^2 \frac{u'-u}{2} = \frac{1+\mathrm{Cos}\,(u'-u)}{2},$$

also ist auch die erste der Gleichungen (3)

$$0 = 1 - \left(\frac{\gamma+k}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\gamma-k}{2a}\right)^2$$

$$+ 2\left(\frac{\gamma+k}{2a}\right)\left(\frac{\gamma-k}{2a}\right)\mathrm{Cos}\,(u'-u) - \mathrm{Cos}^2\,(u'-u)$$

oder auch

$$\mathrm{Cos}\,(u'-u) = \left(\frac{\gamma+k}{2a}\right)\left(\frac{\gamma-k}{2a}\right)$$

$$+ \sqrt{\left[1-\left(\frac{\gamma+k}{2a}\right)^2\right]\cdot\left[1-\left(\frac{\gamma-k}{2a}\right)^2\right]}$$

Setzt man daher

$$\frac{\gamma+k}{2a} = \mathrm{Cos}\,\alpha \text{ und } \frac{\gamma-k}{2a} = \mathrm{Cos}\,\beta, \text{ so ist}$$

$$\mathrm{Cos}\,(u'-u) = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta = \mathrm{Cos}\,(\alpha-\beta),$$

und daher

$$u'-u = \beta-\alpha = \mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{\gamma-k}{2a} - \mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{\gamma+k}{2a};$$

und überdiess

$$\mathrm{tg}\,\frac{u'-u}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\,\beta - \mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Cos}\,\alpha}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin\,Arc\,Cos}\,\frac{\gamma-k}{2a} - \mathrm{Sin\,Arc\,Cos}\,\frac{\gamma+k}{2a}}{\frac{\gamma-k}{2a} + \frac{\gamma+k}{2a}}.$$

und daher auch die zweyte der Gleichungen (3)

$$\frac{\mu\theta}{a^{\frac{3}{2}}} = \beta - \alpha - \frac{\gamma}{a}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta-\alpha}{2} \text{ oder}$$

$$\frac{\mu\theta}{a^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{\gamma-k}{2a} - \mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{\gamma+k}{2a}$$

$$- \mathrm{Sin\,Arc\,Cos}\,\frac{\gamma-k}{2a} + \mathrm{Sin\,Arc\,Cos}\,\frac{\gamma+k}{2a}.$$

III. Um aus dem letzten Ausdrucke von $\frac{\mu\theta}{a^{\frac{3}{2}}}$ für die Ellipse

den analogen für die Parabel abzuleiten, wird man in ihm den Werth von a unendlich gross, also

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{\gamma + k}{2a} \text{ und } \text{Cos}\,\beta = \frac{\gamma - k}{2a}$$

gleich der Einheit annehmen, und $\alpha - \text{Sin}\,\alpha = \frac{1}{6}\,\text{Sin}^3\,\alpha$ setzen. Es ist aber $\alpha = \text{Arc Cos}\,\frac{\gamma + k}{2a}$ und $\text{Sin}\,\alpha = \text{Sin Arc Cos}\,\frac{\gamma + k}{2a}$, also geht die Gleichung $\alpha - \text{Sin}\,\alpha = \frac{1}{6}\,\text{Sin}^3\,\alpha$ in folgende über

$$\text{Arc Cos}\,\frac{\gamma + k}{2a} - \text{Sin Arc Cos}\,\frac{\gamma + k}{2a} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \text{Cos}^2\,\text{Arc Cos}\,\frac{\gamma + k}{2a}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \left(\frac{\gamma + k}{2a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{r' + r - k}{a}\right)^{\frac{3}{2}};$$

da man nämlich hat $\left(\frac{\gamma + k}{2a}\right)^2 = \left(\frac{2a - r' - r + k}{2a}\right)^2$

$$= \left(1 - \frac{(r' + r - k)}{2a}\right)^2 = 1 - \frac{2(r' + r - k)}{2a} + \frac{(r' + r - k)^2}{4a^2}$$

$$= 1 - \frac{(r' + r - k)}{a}.$$

Ganz eben so findet man auch

$$\text{Arc Cos}\,\frac{\gamma - k}{2a} - \text{Sin Arc Cos}\,\frac{\gamma - k}{2a} = \frac{1}{6}\left(\frac{r' + r + k}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

und daher hat man für den gesuchten Ausdruck in der Parabel

$$6\mu\theta = (r' + r + k)^{\frac{3}{2}} - (r' + r - k)^{\frac{3}{2}}.$$

9. §. Nehmen wir nun wieder drey beobachtete geocentrische Längen λ, λ', λ'' und Poldistanzen π, π', π'' an, und suchen wir daraus die Elemente der Bahn unter der Voraussetzung, dass diese Bahn eine Parabel ist.

I. Mit der S. 129 angenommenen Bezeichnung von

$$A' = \text{Cotg}\,\pi'\,\text{Sin}\,(L' - \lambda'') - \text{Cotg}\,\pi''\,\text{Sin}\,(L' - \lambda') \text{ und}$$

$$C' = \text{Cotg}\,\pi\,\text{Sin}\,(L' - \lambda') - \text{Cotg}\,\pi'\,\text{Sin}\,(L' - \lambda)$$

suche man

$$m = \frac{C'\theta}{A'\theta''} \text{ und } \delta'' = m\,\delta,$$

so findet man, analog mit S. 135

$$r^2 = D^2 + \delta^2 \operatorname{Cosec}^2 \pi + 2 D \delta \operatorname{Cos} (L - \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$r''^2 = D''^2 + m^2 \delta^2 \operatorname{Cosec}^2 \pi'' + 2 m D'' \delta \operatorname{Cos} (L'' - \lambda''). \quad (2)$$

und für die Sehne k zwischen den beyden äussersten Beobachtungen

$$k^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2 \text{ oder}$$

$$k^2 = r^2 + r''^2 - 2 m \delta^2 [\operatorname{Cos} (\lambda - \lambda'') + \operatorname{Cotg} \pi \operatorname{Cotg} \pi'']$$
$$- 2 m D \delta \operatorname{Cos} (\lambda'' - L) - 2 D'' \delta \operatorname{Cos} (\lambda - L'')$$
$$- 2 D D'' \operatorname{Cos} (L - L'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Endlich hat man noch, wenn θ' die Zeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung bezeichnet und

$$\mu = 0.017202 \text{ ist,}$$

$$6 \mu \theta' = (r'' + r + k)^{\frac{3}{2}} - (r'' + r - k)^{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese vier Gleichungen (1) . . (4) geben (nach S. 57) die Grössen r r'' δ und k, also auch $\delta'' = m \delta$.

II. Daraus findet man die heliocentrischen Längen l l'' in der Ecliptik und die heliocentrischen Poldistanzen p p'' durch folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} (L - l) &= \delta \operatorname{Cos} (L - \lambda) + D \\ r \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} (L - l) &= \delta \operatorname{Sin} (L - \lambda) \\ r \operatorname{Cos} p &= \delta \operatorname{Cotg} \pi \end{aligned}\right\},$$

und durch

$$\left.\begin{aligned} r'' \operatorname{Sin} p'' \operatorname{Cos} (L'' - l'') &= \delta'' \operatorname{Cos} (L'' - \lambda'') + D'' \\ r'' \operatorname{Sin} p'' \operatorname{Sin} (L'' - l'') &= \delta'' \operatorname{Sin} (L'' - \lambda'') \\ r'' \operatorname{Cos} p'' &= \delta'' \operatorname{Cotg} \pi'' \end{aligned}\right\}.$$

Ist $l'' < l$, so ist der Komet retrograd. Die Übereinstimmung der hier erhaltenen Werthe von r und r'' mit denen in (I) wird zur Prüfung der Rechnung dienen.

III. Nennt man dann Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn in der Ecliptik und n die Neigung derselben gegen die Ecliptik, so ist

$$\operatorname{tg} n \operatorname{Sin} (l - \Omega) = \pm \operatorname{Cotg} p$$
$$\operatorname{tg} n \operatorname{Sin} (l'' - \Omega) = \pm \operatorname{Cotg} p'' \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg} n \operatorname{Sin} (l - \Omega) = \pm \operatorname{Cotg} p$$

$$\operatorname{tg} n \operatorname{Cos} (l - \Omega) = \frac{\pm \operatorname{Cotg} p'' \mp \operatorname{Cotg} p \operatorname{Cos} (l'' - l)}{\operatorname{Sin} (l'' - l)}$$

das untere Zeichen, wenn die Bewegung des Kometen rückgängig (von Ost gen West) ist.

IV. Sind dann u und u″ die Argumente der Breite in den beyden äussersten Beobachtungen, so ist

$$\mathrm{tg}\, u = \frac{\mathrm{tg}\,(l - \Omega)}{\mathrm{Cos}\, n},\ \mathrm{tg}\, u'' = \frac{\mathrm{tg}\,(l'' - \Omega)}{\mathrm{Cos}\, n},$$

wo u und u″ in demselben Quadranten mit $(l - \Omega)$ und $(l'' - \Omega)$ genommen werden müssen. Also kennt man auch $u'' - u = v'' - v$ oder die Differenz der beyden wahren Anomalien.

V. Ist dann *Π* die Länge des Periheliums und v die wahre Anomalie in der ersten Beobachtung, so ist

$$v = u + \Omega - \Pi,\ \text{also auch (S. 146)}$$

$$\sqrt{\frac{2}{p}} \cdot \mathrm{os}\, \frac{u + \Omega - \Pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}},$$

$$\sqrt{\frac{2}{p}} \cdot \mathrm{Sin}\, \frac{u + \Omega - \Pi}{2} = \frac{\mathrm{Cotg}\, \frac{v'' - v}{2}}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\mathrm{Sin}\, \frac{v'' - v}{2} \sqrt{r''}},$$

aus welchen beyden Gleichungen man *Π* und den halben Parameter p findet.

VI. Endlich ist die Zeit T des Durchgangs des Kometen durch das Perihelium

$$T = \text{Zeit der I. Beob.} \mp \frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\mu} \left(\mathrm{tg}\, \frac{v}{2} + \tfrac{1}{3}\, \mathrm{tg}^3 \frac{v}{2}\right) \text{ oder}$$

$$T = \text{Zeit der III. Beob.} \mp \frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\mu} \left(\mathrm{tg}\, \frac{v''}{2} + \tfrac{1}{3}\, \mathrm{tg}^3 \frac{v''}{2}\right)$$

die oberen Zeichen, wenn bey directer Bewegung $u + \Omega > \Pi$ oder wenn bey retrograder Bewegung $u + \Omega < \Pi$.

Die Übereinstimmung beyder Werthe von T wird zur Prüfung der ganzen Rechnung dienen.

Ex. An dem zweyten Kometen von 1813 hat man folgende Beobachtungen in Göttingen gemacht:

1813	mittl. Zeit Göttingen	scheinb. R.	scheinb. Poldistanz.
April 7.	13ʰ 12′ 2″	271° 7′ 19″.3	84° 25′ 23″.3
14.	13 7 36	266 44 5.5	90 33 0.8
21.	14 23 0	256 39 19 3	102 57 56.0

Sucht man daraus nach S. 29 die Länge λ und die Distanz π des Kometen von dem Pol der Ecliptik, so ist

Zeiten...7.55002	$\lambda = 271° 16' 38''$	$\pi = 60\ 58\ \ 0$
14.54694	$\lambda' = 266\ 27\ 22$	$\pi' = 67\ \ 7\ 42$
21.59931	$\lambda'' = 256\ 48\ \ 8$	$\pi'' = 80\ \ 6\ 48$

und für dieselben Zeiten hat man

$$L = 197° 47' 41'' \qquad \log D = 0.00091$$
$$L' = 204\ 38\ 45 \qquad \log D' = 0.00175$$
$$L'' = 211\ 31\ 25 \qquad \log D'' = 0.00260$$

Damit findet man

aus (I)....... $\log m = 9.75799$

$$\log \delta = 9.80364 \qquad \log r = 0.13900$$
$$\log \delta'' = 9.56163 \qquad \log r'' = 0.11070$$

aus (II)... $l = 225° 4' 22''$ $\qquad l'' = 223° 6' 55''$

$$p = 75\ 8\ 21 \qquad p'' = 87\ 10\ 32$$
$$\log r = 0.13896 \qquad \log r'' = 0.11068$$

und der Komet ist retrograd

aus (III)...... $\Omega = 42° 40' 8''$

$$n = 81\ \ 1\ 3$$

aus (IV)....... $u = 195° 2' 59''$

$$u'' = 182\ 51\ 24$$

aus (V) .... $\Pi = 197° 37' 51''$

$$\log p = 0.38572$$

aus (VI)...... $T = 7.550 + 41.968 = 49.518$

$$T = 21.590 + 27.918 = 49.517$$

Im Mittel Zeit des Perihels 49.5175 April

30

19.5175 May.

Wir haben daher für die gesuchten Elemente

Zeit des Durchgangs durch das Perihel 1813 den	19.5175 May
Länge des Perihels	197° 37′ 51
Länge des aufsteigenden Knotens	42 40 8
Neigung	81 1 3
Halber Parameter	2.43063

Bewegung retrograd.

10. §. Einfacher wird die Auflösung dieses Problems, wenn man die Bahn des Planeten als kreisförmig voraussetzen darf.

Ist a der Halbmesser dieses Kreises und substituirt man die Werthe von

$$x = \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \lambda + R \operatorname{Cos} L$$
$$y = \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \lambda + R \operatorname{Sin} L$$
$$z = \rho \operatorname{Cos} \pi$$

in der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

so erhält man

$$\rho = \sqrt{a^2 - (R^2 - A^2)} - A;$$

wo $A = R \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} (L - \lambda)$ ist.

Eben so erhält man für eine zweyte Beobachtung

$$\rho' = \sqrt{a^2 - (R'^2 - A'^2)} - A',$$

wo $A' = R' \operatorname{Sin} \pi' \operatorname{Cos} (L' - \lambda')$ ist.

Heisst wieder k die Sehne, welche die Endpuncte der Halbmesser in den beyden Beobachtungen verbindet, so ist

$$k^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} k^2 = 2a^2 &- 2\rho\rho' (\operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \pi' \operatorname{Cos} (\lambda - \lambda') + \operatorname{Cos} \pi \operatorname{Cos} \pi') \\ &- 2\rho R' \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} (L' - \lambda) \\ &- 2\rho' R \operatorname{Sin} \pi' \operatorname{Cos} (L - \lambda') \\ &- 2 R R' \operatorname{Cos} (L - L'). \end{aligned}$$

Ferner hat man für die Fläche s des Kreissectors zwischen den beyden Beobachtungen

$$s = a^2 \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} \frac{k}{2a};$$

und wenn $\mu = \dfrac{0.0172021}{\operatorname{Sin} 1''} = 3548''.1866$ ist,

$$s = \tfrac{1}{2} \mu t . \sqrt{a};$$

also ist auch, wenn man beyde Werthe von s wieder gleich setzt,

$$\frac{k}{2a} - \operatorname{Sin} \frac{\mu t}{2a^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Die vorhergehenden Gleichungen enthalten nur die unbekannten Grössen a ρ und ρ'. Um sie daraus zu bestimmen, kann man so verfahren.

I. Sey $A = R \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} (L - \lambda)$, $A' = R' \operatorname{Sin} \pi' \operatorname{Cos} (L' - \lambda')$

$$R = 2 R' \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} (L' - \lambda), \; R' = 2 R \operatorname{Sin} \pi' \operatorname{Cos} (L - \lambda')$$

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{Cos} (\lambda - \lambda') \operatorname{tg} \pi.$$

Hat man diese beständigen Hülfsgrössen berechnet, so

findet man in einer ersten Hypothese mit einem angenommenen Werthe von a die Grössen m m′ ρ ρ′ und k aus den Gleichungen

$$\mathrm{Sin}\, m = \tfrac{1}{a}\sqrt{R^2 - A^2} \qquad \mathrm{Sin}\, m' = \tfrac{1}{a}\sqrt{R'^2 - A'^2},$$

$$\rho = a\,\mathrm{Cos}\, m - A \qquad \rho' = a\,\mathrm{Cos}\, m' - A'$$

$$k^2 = 2a^2 - 2\rho\rho'\frac{\mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,(C-\pi')}{\mathrm{Cos}\,C} - B\rho - B'\rho'$$

$$- 2RR'\,\mathrm{Cos}\,(L-L'),$$

und wenn der so gefundene Werth von k der Gleichung

$$\frac{k}{2a} - \mathrm{Sin}\,\frac{\mu t}{2a^{\frac{3}{2}}} = 0$$

nicht genügt, so wiederholt man mit einem zweyten Werthe von a die Berechnung von m m′ ρ ρ′ k, wodurch man endlich nach der bekannten Methode (S. 57) den wahren Werth von a, welcher der letzten Gleichung entspricht, findet

Kennt man so a, ρ und ρ′, so findet man die heliocentrische Länge und Breite aus

$$\mathrm{Cos}\, p = \frac{\rho}{a}\mathrm{Cos}\,\pi \qquad \mathrm{Sin}\,(L-l) = \frac{\rho\,\mathrm{Sin}\,\pi}{a\,\mathrm{Sin}\,p}\mathrm{Sin}\,(L-\lambda),$$

$$\mathrm{Cos}\, p' = \frac{\rho'}{a}\mathrm{Cos}\,\pi' \qquad \mathrm{Sin}\,(L'-l') = \frac{\rho'\,\mathrm{Sin}\,\pi'}{a\,\mathrm{Sin}\,p'}\mathrm{Sin}\,(L'-\lambda'),$$

und daraus die Länge ☊ des aufsteigenden Knotens und die Neigung n der Bahn durch die Gleichungen

$$\mathrm{tg}\, n\,\mathrm{Sin}\,(l - ☊) = \mathrm{Cotg}\, p,$$

$$\mathrm{tg}\, n\,\mathrm{Cos}\,(l - ☊) = \frac{\mathrm{Cotg}\, p' - \mathrm{Cotg}\, p\,\mathrm{Cos}\,(l'-l)}{\mathrm{Sin}\,(l'-l)}.$$

Ex. Wenden wir diese Auflösung auf die zwey ersten in §. 7. gegebenen Beobachtungen der Vesta vom 24. und 29. April 1807 an, so hat man

$$t = 4.9850197$$

$$\log A = 9.8807012 \qquad \log B = 0.1492157$$

$$\log A' = 9.8457471 \qquad \log B' = 0.1797447$$

$$C = 78^\circ\, 22'\, 34''.97$$

$$\log\sqrt{R^2 - A^2} = 9.8197078 \qquad \log\sqrt{R'^2 - A'^2} = 9.8598422$$

$$\log\frac{2\,\mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,(C-\pi')}{\mathrm{Cos}\,C} = 0.3010147 \text{ und}$$

$$2RR'\,\mathrm{Cos}\,(L-L') = 2.0218832.$$

Ist dann in einer ersten Hypothese $a = 2$, so findet man

$$m = 19^\circ 16' 34''.8 \qquad m' = 21^\circ 13' 42''.2$$

$$\log\rho = 0.0523367 \qquad \log\rho' = 0.0656700$$

$$k^2 = 0.0035973$$

$$\log\frac{k}{2a} = 8.1759283$$

$$\log \operatorname{Sin}\frac{\mu t}{2a^{\frac{3}{2}}} = 8.1806569$$

Fehler 0.0047286.

Ist für eine zweyte Hypothese $a = 2.2$, so ist

$$m = 17^\circ 27' 51''.85 \qquad m' = 19^\circ 13' 6''.14$$

$$\log\rho = 0.1267106 \qquad \log\rho' = 0.1387286$$

$$k^2 = 0.0033423$$

$$\log\frac{k}{2a} = 8.1185700$$

$$\log \operatorname{Sin}\frac{\mu t}{2a^{\frac{3}{2}}} = 8.1185717$$

Fehler 0.0000017

Daraus folgt verbessertes $a = 2.2000755$ und daraus

$$\log\rho = 0.1267373, \quad \log\rho' = 0.1387549.$$

Mit diesen Werthen von a, ρ und ρ' erhält man

$$l = 191^\circ 12' 39''.1 \qquad l' = 192^\circ 43' 38''.9$$

$$p = 82\;57\;26.1 \qquad p' = 82\;56\;26.9$$

$$n = 7^\circ 4' 45''$$

$$\Omega = 107^\circ 3' 17''.8.$$

Die Neigung ist (vergl. S. 144) genau genug, die Knotenlinie aber weicht von der wahren beträchtlich ab, weil das Argument der Breite nahe an 90° ist, wo sich der Knoten nicht genau bestimmen lässt.

11. §. Setzt man endlich für sehr nahe Beobachtungen, in einer ersten noch unvollkommenen Näherung, die Bahn des Kometen als geradlinig voraus, so wird man die S. 128 gebrauchten Grössen f, f', f'' als die Flächen der geradlinigen Dreyecke betrachten, welche zwischen der Tangente der Bahn d. h. zwischen der Bahn selbst und den Radien der drey Beobachtungen enthalten sind, und da alle diese Dreyecke eine gemeinschaftliche Höhe haben, weil ihr ge-

meinschaftlicher Scheitel in dem Mittelpuncte der Sonne steht, so werden sich die Flächen dieser Dreyecke wie ihre Grundlinien verhalten. Da aber die Bewegung in einer geraden Linie während einer kurzen Zeit als gleichförmig vorausgesetzt werden kann, so verhalten sich diese Grundlinien, also auch jene Flächen, wie die Zwischenzeiten θ, θ', θ'' der Beobachtungen. Behält man daher die oben S. 129 eingeführten Bezeichnungen bey, so erhält man δ und δ'' sofort aus den beyden Gleichungen

$$\delta = \frac{\theta'}{\theta} \cdot \frac{A'D'}{a} - \frac{\theta''}{\theta} \cdot \frac{A''D''}{a} - \frac{AD}{a},$$

$$\delta'' = \frac{\theta C'}{\theta'' A'} \cdot \delta.$$

Kennt man so δ und δ'', so hat man

$$x = \delta \operatorname{Cos} \lambda + D \operatorname{Cos} L \text{ und } x'' = \delta'' \operatorname{Cos} \lambda'' + D'' \operatorname{Cos} L''$$
$$y = \delta \operatorname{Sin} \lambda + D \operatorname{Sin} L \quad y'' = \delta'' \operatorname{Sin} \lambda'' + D'' \operatorname{Sin} L''$$
$$z = \delta \operatorname{Cotg} \pi \quad z'' = \delta'' \operatorname{Cotg} \pi''$$

und daraus erhält man Ω und n durch die drey letzten Gleichungen des §. 4, III.

Ex. Wenden wir dieses auf die S. 142 gegebenen drey Beobachtungen der Vesta an, so hat man mit den bereits oben angeführten Werthen von A, A', A'' und C'

$$\log \delta = 0.1690281 \text{ und } \log \delta'' = 0.1910246;$$

daraus folgt

$$x = -2.30534 \quad x'' = -2.27607$$
$$y = -0.40769 \quad y'' = -0.51908$$
$$\log z = 9.48225 \quad \log z'' = 9.48012$$

$$y''z - yz'' = -0.03442$$
$$xz'' - x''z = -0.00545$$
$$xy'' - x''y = +0.26873$$

also $\Omega = 99° 0' 13''$ und $n = 7° 23' 22''$.

12. §. Noch muss bemerkt werden, dass die geocentrischen Beobachtungen, wie sie von den Astronomen gewöhnlich angegeben werden, in Rectascension und Declination ausgedrückt und bloss von der Refraction corrigirt sind. Man wird daher diese Beobachtungen (nach S. 29) zuerst mit der scheinbaren Schiefe der Ecliptik (S. 77) auf Länge λ und Distanz π von dem Pole der Ecliptik bringen. Zu dieser

Länge λ wird man die Grösse $+16''.78 \sin \Omega$ ☾ setzen, um sie von der Nutation (S. 75) zu befreyen. Die Nutation der Poldistanz π ist Null. Zu den aus den Sonnentafeln genommenen Längen der Erde aber, wo man die Nutation (Taf. XIV) ganz weglässt, wird man die constante Aberration $+20''.255$ (S. 88) setzen, und diese Grössen

$$\lambda + 16''78 \sin \Omega\ ☾ \text{ und } L + 20''255$$

sind es, die man in den vorhergehenden Ausdrücken unter den Zeichen λ und L versteht. Eigentlich sollten die Grössen λ, π und L noch von der Aberration und der Parallaxe befreyt werden; da aber dazu die Kenntniss der Entfernung ρ des Körpers von der Erde gehört, die hier noch unbekannt ist, so wird man bey einer ersten genäherten Bahnbestimmung die zwey letzten Correctionen bequem ganz übergehen. Ist aber, aus vorhergehenden Rechnungen, bereits ein genäherter Werth von ρ bekannt, so wird man zu der beobachteten Länge oder Poldistanz, um sie von der Aberration zu befreyen, noch die Grösse $+0.00571\, m\rho$ hinzusetzen, wo m die tägliche Zunahme der Länge oder der Poldistanz in Secunden ausgedrückt ist. (S. 87.) Um eben so die beobachteten Orte des Planeten von der Parallaxe zu befreyen, wird man der beobachteten Länge die Grösse

$$+\varpi \frac{\sin B \sin (L - \lambda)}{\sin \pi}$$

und der beobachteten Poldistanz die Grösse

$$+\varpi (\sin B \cos \pi \cos (L - \lambda) - \cos B \sin \pi)$$

hinzusetzen, wo L und B die Länge und Distanz des Zeniths von dem Pole der Ecliptik bezeichnet. (S. 98)

Vorlesung XIII.

Verbesserung der schon nahe bekannten Elemente.

1. §. Die in der vorhergehenden Vorlesung aus drey geocentrischen Beobachtungen erhaltenen Elemente der Bahn werden im Allgemeinen aus drey Ursachen noch einer oft nicht unbedeutenden Verbesserung fähig seyn. Denn erstens werden die Beobachtungen selbst, wie alle Menschenwerke, nicht ganz fehlerfrey seyn, zweytens werden diese Fehler bey kleineren Zwischenzeiten der Beobachtungen (und solche musste man oben der Schwierigkeit der Auflösung wegen voraussetzen) einen desto grösseren Einfluss auf die daraus abgeleiteten Elemente haben, je kleiner diese Zwischenzeiten selbst sind, und endlich drittens ist die oben gegebene Auflösung des Problems, wie wir gesehen haben, nicht direct oder streng, sondern nur genähert, und daher aus diesem Grunde wieder neuen Fehlern ausgesetzt.

Um sich zuerst die möglich sichersten Beobachtungen zu verschaffen, berechne man mit den aus Vorl. XII. schon nahe bekannten Elementen die geocentrischen Orte für mehrere auf einander folgende Beobachtungszeiten, so wird man die Unterschiede dieser berechneten und der in der That beobachteten Orte in dem Laufe mehrerer Tage als constant oder doch als der Zeit proportional annehmen können. Seyen z. B. für die Zeiten $t, t', t'' \ldots$ die beobachteten Längen oder Poldistanzen $a, a', a'' \ldots$ und die für dieselben Zeiten aus den Elementen berechneten Längen oder Poldistanzen $a + \delta$, $a' + \delta'$, $a'' + \delta''$ . . so werden die Grössen $\delta\ \delta'\ \delta''$ . . als die Folgen der fehlerhaften Elemente angesehen werden können, wenn die Beobachtungen selbst als richtig vorausgesetzt werden. Sind daher diese Grössen $\delta, \delta', \delta''$ . . . nahe constant,

so wird $\Delta = \frac{\delta + \delta' + \delta'' +}{\text{Anzahl der Beob.}}$ der wahrscheinliche Fehler eines jeden einzelnen dieser aus den Elementen berechneten geocentrischen Orte seyn, und man wird daher für die wahren geocentrischen Längen oder Poldistanzen für die oben erwähnten Zeiten annehmen

$a + \delta - \Delta$ für die Zeit t
$a' + \delta' - \Delta$ - - - t'
$a'' + \delta'' - \Delta$ - - - t'' u. f.

und die auf diese Art corrigirten Beobachtungen wird man den nun folgenden Untersuchungen zu Grunde legen, wodurch daher die erste der oben angeführten Fehlerquellen, so viel möglich, vermieden wird.

2. §. Um aber auch den Folgen der zwey übrigen Fehlerquellen zu begegnen, wollen wir zuerst drey in der Zeit sehr entfernte und nach §. 1 bereits verbesserte Beobachtungen zu Grunde legen.

Für die beyden äussersten Beobachtungen suche man aus den bereits nahe bekannten Elementen die curtirten Distanzen des Planeten von der Erde oder die Grössen δ und δ'.

Mit diesen Werthen von δ und δ'' findet man l p und r aus

$$r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos}(L - l) = \delta \operatorname{Cos}(L - \lambda) + D$$
$$r \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin}(L - l) = \delta \operatorname{Sin}(L - \lambda)$$
$$r \operatorname{Cos} p = \delta \operatorname{Cotg} \pi$$

und eben so l'', p'' und r''. Daraus aber findet man Ω und n aus

$$\operatorname{tg} n \operatorname{Sin}(l - \Omega) = \operatorname{Cotg} p,$$
$$\operatorname{tg} n \operatorname{Cos}(l - \Omega) = \frac{\operatorname{Cotg} p'' - \operatorname{Cotg} p \operatorname{Cos}(l'' - l)}{\operatorname{Sin}(l'' - l)},$$

und endlich u und u'' aus

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg}(l - \Omega)}{\operatorname{Cos} n}, \qquad \operatorname{tg} u'' = \frac{\operatorname{tg}(l'' - \Omega)}{\operatorname{Cos} n}.$$

Da sonach r, r'' und $u'' - u$ bekannt ist, so kann man aus diesen drey Grössen alle übrigen Elemente der Bahn (nach Vorl. XII. §. 5 und 6) suchen, und diese neuen Elemente werden jene zwey äussersten Beobachtungen genau darstellen, wenn auch die anfangs angenommenen Werthe von δ und δ'' fehlerhaft sind. Mit diesen neuen Elementen

berechne man jetzt auch den geocentrischen Ort M für die dritte der oben zu Grunde gelegten Beobachtungen (wo M diese berechnete Länge und auch die Poldistanz bezeichnet). Ist dieser berechnete Ort M dem in der That beobachteten geocentrischen Orte in der dritten Beobachtung nicht schon nahe gleich (in welchem Falle die ersten genäherten Elemente auch schon die wahren wären, bey denen man daher auch stehen bleiben könnte), so wiederhole man das ganze so eben angezeigte Verfahren mit andern Werthen von δ und δ'', die wir $\delta + d\delta$ und δ'' nennen wollen (wo also die curtirte Distanz δ'' der dritten Beobachtung dieselbe, wie in der ersten Hypothese ist), und suche mit diesen aus $\delta + d\delta$ und δ'' abgeleiteten Elementen wieder den geocentrischen Ort $M + dM$.

Ganz eben so suche man endlich noch in einer dritten Rechnung mit den Grössen δ und $\delta'' + d\delta''$ die Elemente und daraus den geocentrischen Ort $M + dM''$.

Da nun die Grössen $d\delta$, $d\delta''$, dM und dM'' nur klein seyn werden, so kann man annehmen, dass in einer vierten Hypothese, für welche man jene curtirten Distanzen gleich

$$\delta + x.d\delta \text{ und } \delta'' + y.d\delta''$$

annähme, der aus dieser Annahme berechnete geocentrische Ort in der dritten Beobachtung gleich

$$M + x.dM + y.dM''$$

seyn wird. Ist daher N der in der That beobachtete geocentrische Ort dieser dritten Beobachtung, so hat man

$$M + x.dM + y.dM'' = N,$$

und da sowohl die geocentrische Länge, als auch die geocentrische Poldistanz eine solche Gleichung gibt, so wird man aus diesen beyden Gleichungen die Werthe von x und y, also auch die wahren curtirten Poldistanzen der zwey äussersten Beobachtungen oder $\delta + x.d\delta$ und $\delta'' + y.d\delta''$ finden, aus welchen man dann die wahren d. h. diejenigen Elemente berechnen kann, welche allen drey Beobachtungen vollkommen entsprechen.

I. Dieses Verfahren lässt sich auch auf mehr als drey Beobachtungen ausdehnen. Sucht man nämlich in der ersten Hypothese durch die aus δ und δ'' abgeleiteten Elemente die

geocentrischen Orte einer dritten, vierten, fünften Beobachtung, die M, M′, M″ . . heissen sollen, und sind eben so die berechneten geocentrischen Orte in der zweyten Hypothese

$$M + dM,\; M + dM_{,},\; M + dM_{,,} \; . \; . \; .$$

und in der dritten Hypothese

$$M + dM'',\; M + dM''_{,},\; M + dM''_{,,},\; . \; . \; .$$

so hat man, wenn $N, N_{,}, N_{,,}$ . . . die in der That beobachteten Orte sind, für die geocentrischen Längen sowohl als auch für die Breiten folgende Gleichungen

$$M + x\,dM + y\,dM'' = N$$
$$M + x\,dM_{,} + y\,dM''_{,} = N_{,}$$
$$M + x\,dM_{,,} + y\,dM''_{,,} = N_{,,} \; . \; . \; .$$

deren Anzahl 2 n ist, wenn die Anzahl der Beobachtungen selbst gleich n ist, und aus diesen Gleichungen wird man dann nach den bekannten Methoden die wahrscheinlichsten Werthe der beyden Grössen x und y bestimmen.

3. §. Suchen wir nun die Änderungen, welche kleine Fehler der Elemente der Bahn in der geocentrischen Länge und Breite der Planeten hervorbringen.

Behält man die früher angenommenen Bezeichnungen bey, wo u das Argument der Breite und k die Länge des aufsteigenden Knotens ist, so hat man (S. 118)

$$x - X = \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} (\lambda - k) = r \operatorname{Cos} u - R \operatorname{Cos} (L - k)$$
$$y - Y = \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} (\lambda - k) = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} n - R \operatorname{Sin} (L - k)$$
$$z - Z = \rho \operatorname{Cos} \pi \qquad\qquad = r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n.$$

Differentiirt man die ersten Ausdrücke von $x - X$, $y - Y$, $z - Z$ in Beziehung auf $\lambda - k$, π und ρ, so erhält man, wenn man $d\rho$ eliminirt,

$$d(\lambda - k) = \frac{dy \operatorname{Cos}(\lambda - k) - dx \operatorname{Sin}(\lambda - k)}{\rho \operatorname{Sin} \pi},$$

$$d\pi = \frac{dx}{\rho} \operatorname{Cos}(\lambda - k) \operatorname{Cos} \pi + \frac{dy}{\rho} \operatorname{Sin}(\lambda - k) \operatorname{Cos} \pi - \frac{dz}{\rho} \operatorname{Sin} \pi$$

Nimmt man also den Ort der Erde als fehlerfrey an, so hängen die Coordinaten x y z bloss von den vier Grössen u, r, n und k ab, und wir werden daher die partiellen Differentialien dieser Coordinaten in Beziehung auf diese vier Grössen zu nehmen haben. Es ist aber

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{dr}\right)\operatorname{Cos}(\lambda - k) - \left(\frac{dx}{dr}\right)\operatorname{Sin}(\lambda - k)}{\rho \operatorname{Sin} \pi}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} n \operatorname{Cos}(\lambda - k) - \operatorname{Cos} u \operatorname{Sin}(\lambda - k)}{\rho \operatorname{Sin} \pi}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg}(\lambda - k)}{\operatorname{Cos} n},$$

so ist

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right) = -\frac{\operatorname{Sin}(\lambda - k)\operatorname{Sin}(\varphi - u)}{\rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \varphi};$$

und eben so erhält man

$$\left(\frac{d\lambda}{du}\right) = \frac{r \operatorname{Sin}(\lambda - k)\operatorname{Cos}(\varphi - u)}{\rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} \varphi},$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dk}\right) = 1 + \frac{R \operatorname{Cos}(L - \lambda)}{\rho \operatorname{Sin} \pi} \text{ und}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dn}\right) = -\frac{r \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} n \operatorname{Cos}(\lambda - k)}{\rho \operatorname{Sin} \pi}.$$

Eben so ist ferner

$$\left(\frac{d\pi}{dr}\right) = \frac{R \operatorname{Cos} \pi \operatorname{Cos}(L - \lambda)}{r \rho},$$

und wenn $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{Sin}(\lambda - k) \operatorname{tg} n$ ist,

$$\left(\frac{d\pi}{du}\right) = -\frac{r}{\rho} \operatorname{Sin} n \operatorname{Cos}(\lambda - k) \operatorname{Cos}(\varphi - u) \operatorname{Sin}(\psi + \pi)$$

$$+ \frac{r}{\rho} \operatorname{Sin}(\varphi - u) \operatorname{Cos}(\psi + \pi),$$

$$\left(\frac{d\pi}{dk}\right) = -\frac{R}{\rho} \operatorname{Cos} \pi \operatorname{Sin}(L - \lambda),$$

$$\left(\frac{d\pi}{dn}\right) = -\frac{r \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} u \operatorname{Sin}(\psi + \pi)}{\rho \operatorname{Cos} \psi}.$$

Man hat daher

$$d\lambda = \left(\frac{d\lambda}{dr}\right) dr + \left(\frac{d\lambda}{du}\right) du$$

$$+ \left(\frac{d\lambda}{dk}\right) dk + \left(\frac{d\lambda}{dn}\right) dn \text{ und}$$

$$d\pi = \left(\frac{d\pi}{dr}\right) dr + \left(\frac{d\pi}{du}\right) du$$

$$+ \left(\frac{d\pi}{dk}\right) dk + \left(\frac{d\pi}{dn}\right) dn$$

und in diesen Gleichungen müssen noch die Grössen dr und

du durch die Variationen der Elemente der Bahn ausgedrückt werden. Ist a die halbe grosse Axe, $a\varepsilon$ die Excentricität, v und m die wahre und mittlere Anomalie, Π die Länge des Periheliums, θ die tägliche Bewegung des Planeten in mittlerer Länge, M diese mittlere Länge selbst für irgend eine Epoche, die t Tage vor der gegenwärtigen Beobachtung vorausgeht, (folgt die Epoche der Beobachtung nach, so ist t negativ) so hat man, da

$\theta . a^{\frac{3}{2}} = 0.017202$ ist, $da = -\frac{2 a d\theta}{3\theta}$ und überdiess

$$u = v + \Pi - k, \text{ also auch } du = dv + d\Pi - dk$$
$$m = M + t\theta - \Pi \text{ - - - - } dm = dM + t . d\theta - d\Pi.$$

Allein die Grössen dv und dr haben wir schon oben (S. 57) durch dm, $d\varepsilon$ und $da = -\frac{2 a d\theta}{3\theta}$ ausgedrückt.

Setzt man nämlich

$$P = \frac{a\varepsilon \operatorname{Sin} v}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad Q = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-\varepsilon^2},$$

$$R = \frac{(2+\varepsilon \operatorname{Cos} v) \operatorname{Sin} v}{1-\varepsilon^2} \text{ und } S = a \operatorname{Cos} v, \text{ so ist}$$

$$dr = -\frac{2r}{3\theta} . d\theta + P . dm - S . d\varepsilon,$$
$$dv = Q . dm + R . d\varepsilon, \text{ also auch}$$
$$du = Q . dm + R\, d\varepsilon + d\Pi - dk \text{ oder}$$
$$du = Q . (dM + t\, d\theta - d\Pi) + R\, d\varepsilon + d\Pi - dk \text{ und eben so}$$
$$dr = -\frac{2r}{3\theta} . d\theta + P . (dM + t\, d\theta - d\Pi) - S . d\varepsilon.$$

Substituirt man diese Werthe von du und dr in den beyden vorhergehenden Ausdrücken von $d\lambda$ und $d\pi$, so erhält man

$$d\lambda = \left[P t \left(\frac{d\lambda}{dr}\right) + Q t \left(\frac{d\lambda}{du}\right) - \frac{2r}{3\theta}\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)\right] d\theta$$
$$+ \left[P\left(\frac{d\lambda}{dr}\right) + Q\left(\frac{d\lambda}{du}\right)\right] dM$$
$$+ \left[\left(\frac{d\lambda}{du}\right)(1-Q) - P\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)\right] d\Pi$$
$$+ \left[R\left(\frac{d\lambda}{du}\right) - S\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)\right] d\varepsilon$$

$$+\left[\left(\frac{d\lambda}{dk}\right)-\left(\frac{d\lambda}{du}\right)\right]dk$$

$$+\left(\frac{d\lambda}{dn}\right)dn,$$

und eben so

$$d\pi=\left[Pt\left(\frac{d\pi}{dr}\right)+Qt\left(\frac{d\pi}{du}\right)-\frac{2r}{3\theta}\left(\frac{d\pi}{dr}\right)\right]d\theta$$

$$+\left[P\left(\frac{d\pi}{dr}\right)+Q\left(\frac{d\pi}{du}\right)\right]dM$$

$$+\left[\left(\frac{d\pi}{du}\right)(1-Q)-P\left(\frac{d\pi}{dr}\right)\right]d\Pi$$

$$+\left[R\left(\frac{d\pi}{du}\right)-S\left(\frac{d\pi}{dr}\right)\right]d\varepsilon$$

$$+\left[\left(\frac{d\pi}{dk}\right)-\left(\frac{d\pi}{du}\right)\right]dk$$

$$+\left(\frac{d\pi}{dn}\right)dn.$$

4. §. Ist der Planet mit der Sonne in Opposition, d. h. ist $l=\lambda=L$, so werden die vorhergehenden Ausdrücke einfacher. Bezeichnet nämlich wieder p die heliocentrische Poldistanz des Planeten, so ist überhaupt

$$\frac{r}{\rho}=\frac{\text{Cos}\,\pi}{\text{Cos}\,p} \text{ und für die Opposition } \frac{R}{\rho}=\frac{\text{Sin}\,(p-\pi)}{\text{Cos}\,p}.$$

Berücksichtiget man aber die Gleichungen zwischen u, p, $l-k$ und n, die wir Vorles. XI., §. 2 gegeben haben, so findet man, dass φ gleich dem Argumente u der Breite, und dass $\psi=90-p$ ist, und dass man hat

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)=0 \qquad \left(\frac{d\lambda}{dk}\right)=\text{Cotg}\,\pi\,\text{tg}\,p,$$

$$\left(\frac{d\lambda}{du}\right)=\frac{2\,\text{Cotg}\,\pi\,\text{Cos}\,n}{\text{Sin}\,2p} \qquad \left(\frac{d\lambda}{dn}\right)=-\text{Cotg}\,\pi\,\text{Cos}\,(l-k) \text{ und}$$

$$\left(\frac{d\pi}{dr}\right)=\frac{\text{Sin}\,(p-\pi)\,\text{Cos}\,\pi}{r\,\text{Cos}\,p},$$

$$\left(\frac{d\pi}{du}\right)=-\frac{\text{Cos}\,(p-\pi)\,\text{Cos}\,\pi\,\text{Cos}\,n\,\text{Cotg}\,(l-k)}{\text{Sin}\,p},$$

$$\left(\frac{d\pi}{dk}\right)=0,$$

$$\left(\frac{d\pi}{du}\right)=\left(\frac{d\pi}{du}\right)\frac{\text{tg}\,(l-k)}{\text{Sin}\,n}.$$

Man hat daher für Oppositionen

$$d\lambda = \frac{2\,\mathrm{Cotg}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,n}{\mathrm{Sin}\,2p}\{Qt.d\theta + Q.dM + (1-Q)\,d\Pi + R\,d\varepsilon\},$$

$$+\frac{2\,\mathrm{Cotg}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,n}{\mathrm{Sin}\,2p}\{(\mathrm{Sin}^2 p - \mathrm{Cos}\,n)\,dk - \mathrm{Cos}\,p\,\mathrm{Cos}\,u\,.\,dn\}$$

und

$$d\pi = \left(\frac{2r}{3\theta}.C - Et\right)d\theta - E.dM + (E-D)\,d\Pi,$$

$$+(CS - DR)\,d\varepsilon + D.dk - \frac{D\,\mathrm{tg}\,(l-k)}{\mathrm{Sin}\,n}\cdot dn,$$

$$\text{wo } C = \frac{\mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Sin}\,(\pi - p)}{r\,\mathrm{Cos}\,p},$$

$$D = \frac{\mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,(\pi-p)\,\mathrm{Cos}\,n\,\mathrm{Cotg}\,(l-k)}{\mathrm{Sin}\,p} \text{ und}$$

$$E = CP + DQ \text{ ist.}$$

Verwandelt man in den letzten Ausdrücken die Grössen

$l = \lambda$ in A
$p = \pi$ in P
n in e
und k in Null,

so erhält man die Ausdrücke für die Veränderung der Rectascension dA und der Poldistanz dP der Sonne, die aus einer Änderung dM, $d\Pi$, $d\varepsilon$ . . . der Elemente der Erdbahn entspringen. Vergleicht man aber bloss die beobachtete Länge L der Sonne mit der aus den Sonnentafeln berechneten Sonnenlänge, so hat man zur Correction der Elemente der Erdbahn die einzige Gleichung

$$dL = Qt.d\theta + Q\,dM + (1-Q)\,d\Pi + R\,d\varepsilon.$$

ZWEYTE ABTHEILUNG.

Beobachtungen.



Vorlesung I.

Bestimmung der Zeit durch Beobachtungen.

1. §. Das einfachste Mittel zur Zeitbestimmung geben die correspondirenden, d. h. die auf beyden Seiten des Meridians gleich grossen Höhen eines Gestirns. Da nämlich zu gleichen Höhen auch gleiche, bloss in ihren Zeichen entgegengesetzte Stundenwinkel gehören, (S. 46 §. 4) so wird die Mitte zwischen den beyden Beobachtungszeiten auch sofort die Zeit der Culmination des Gestirns seyn.

Hätte man z. B. von einem Gestirn, dessen scheinbare (von Präcession, Nutation und Aberration veränderte) Rectascension $a = 5^h\,40'\,10''$ ist, zwey gleiche Höhen beobachtet,
die erste vor der Culmination um $3^h\ 17'\ 20''$ Uhrzeit
die zweyte nach der Culmin. um 7 26 30
so ist 10 43 50
Mittel T = 5 21 55 Uhrz. d. Culmin
a = 5 40 10
x = + 18 15 Correction der Uhr gegen Sternzeit um $5^h\ 21'\ 55''$ Uhrzeit.

Hätte man eben so von der Sonne zwey gleiche Höhen beobachtet, die erste Morgens um $20^h\ 40'\ 12''$ Uhrzeit
die zweyte Abends um 3 21 18
so ist 0 1 30
Mittel T = 0 0 45 Uhrz. d. Culm.

Da die wahre Sonnenzeit der Culmination der wahren Sonne gleich $0^h\ 0'\ 0''$ ist, so ist die Correction der Uhrzeit gegen wahre Zeit im Augenblicke des wahren Mittags $x = -0^h\,0'\,45''$. Ist aber für den wahren Mittag des Beobachtungstages die mittlere Sonnenzeit $23^h\ 57'\ 24''$, so ist die Cor-

rection der Uhr gegen mittlere Zeit $x = -3' 21''$, und ist endlich für denselben wahren Mittag die Rectascension der wahren Sonne $4^h 35' 5''$, so ist die Correction der Uhr gegen Sternzeit $x = +4^h 34' 20''$.

Man sieht, dass man zu diesen Bestimmungen weder die Declination des beobachteten Gestirns, noch die Polhöhe des Beobachtungsortes, noch auch die absoluten Höhen selbst zu kennen braucht, und dass man bloss von der Gleichheit der beyden Höhen und von dem gleichförmigen Gang der Uhr versichert seyn muss. Beobachtungsfehler zu vermeiden, oder die unvermeidlichen wenigstens zu vermindern, wird man auf beyden Seiten des Meridians mehrere Höhen nehmen.

2. §. Das Vorhergehende setzt voraus, dass die Poldistanz p während der beyden Beobachtungen dieselbe bleibt.

Es war (S. 27)

$$\text{Cos}\, z = \text{Sin}\, \varphi\, \text{Cos}\, p + \text{Cos}\, \varphi\, \text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, s$$

wenn z, s und φ die Zenithdistanz und den Stundenwinkel des Sterns und die Polhöhe des Beobachtungsortes bezeichnet. Differentiirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf p und s, so erhält man

$$ds = dp\left(\text{Cotg}\, s\, \text{Cotg}\, p - \frac{\text{tg}\, \varphi}{\text{Sin}\, s}\right).$$

Ist also p die Poldistanz der Sonne in der ersten, und p' in der letzten Beobachtung, und ist T, wie zuvor, das Mittel aus beyden Beobachtungszeiten, so ist die verbesserte Uhrzeit der Culmination

$$T + \frac{(p' - p)}{30}\left(\frac{\text{tg}\, \varphi}{\text{Sin}\, s} - \text{Cotg}\, s\, \text{Cotg}\, \frac{p' + p}{2}\right),$$

wo s den Stundenwinkel der letzten Beobachtung bezeichnet. Ist Δ die Änderung der Poldistanz in einem Tage, und θ die ganze Zwischenzeit der Beobachtungen in Stunden der Uhrzeit ausgedrückt, so ist

$$24 : \Delta = \theta : p' - p$$

also auch

$$p' - p = \frac{\Delta\, \theta}{24},$$

welcher Ausdruck für $p' < p$ negativ wird.

Man findet die tägliche Änderung der Poldistanz der Sonne aus folgender Tafel, deren Argument die wahre Länge der Sonne ist.

☉	d p	☉	d p	☉	d p	☉	d p
0°	— 23.70	90°	0'.00	180°	23'.43	270°	0'.00
6	— 23.50	96	2.60	186	23.40	276	— 2.77
12	— 23.09	102	5.14	192	23.16	282	— 5.50
18	— 22.47	108	7.61	198	22.69	288	— 8.13
24	— 21.63	114	9.96	204	21.99	294	— 10.62
30	— 20.57	120	12.16	210	21.07	300	— 12.95
36	— 19.31	126	14.19	216	19.90	306	— 15.07
42	— 17.85	132	16.04	222	18.50	312	— 16.97
48	— 16.16	138	17.69	228	16.85	318	— 18.65
54	— 14.28	144	19.14	234	14.97	324	— 20.08
60	— 12.23	150	20.38	240	12.88	330	— 21.27
66	— 10.00	156	21.40	246	10.57	336	— 22.22
72	— 7.63	162	22.23	252	8.10	342	— 22.93
78	— 5.15	168	22.84	258	5.48	348	— 23.41
84	— 2.60	174	23.24	264	2.77	354	— 23.66
						360	— 23.70

Ex. Den 10. May 1828 wurden in Wien folgende correspondirende Sonnenhöhen genommen:

U h r z e i t

Morgens	Abends	Mittel
$20^h\ 44'\ 14''.2$	$4^h\ 18'\ 11''.0$	$0^h\ 31'\ 12''.6$
20 47 32 .3	4 14 53 . 7	0 31 13.0
20 50 44 . 0	4 11 40 . 8	0 31 12.4

Mittel $T = 0^h\ 31'\ 12.67$

Die Zwischenzeit der beyden mittleren Beobachtungen ist $\theta = 7^h.456$ und die tägliche Abnahme der Poldistanz

$$\varDelta = 938''.5 \text{ also } \frac{p'-p}{30} = -9''.719 \text{ und } \varphi = 48^\circ\ 12'\ 35''$$

so wie $s = 4^h\ 14'\ 53''.7 - 0^h\ 31\ 12''.7 = 3^h\ 43'\ 41''$
$= 55^\circ\ 55'\ 15''$.

Endlich ist $\frac{p'+p}{2}$ oder die Poldistanz der Sonne im Mittag gleich 72° 19′. Man hat daher

$$\frac{p'-p}{30} \cdot \frac{\text{tg}\,\varphi}{\text{Sin}\,s} = -13.12$$

$$-\frac{p'-p}{30} \cdot \text{Cotg}\,s\,\text{Cotg}\,\frac{p'+p}{2} = +\ 2.11$$

Correction $= -11''.01$

$T = 0^h 31' 12.67$

Verbesserte Uhrzeit des Mittags $= 0^h 31'\ 1''.66$

Mittlere Zeit im wahren Mittag $= 23\ 56\ 10\ .\ 0$

Correction der Uhr gen mittl. Zeit x $= -34' 51''.66$

Es ist für sich klar, dass man durch denselben Ausdruck auch die verbesserte Mitternacht findet, wenn man die ersten Beobachtungen Abends und die correspondirenden am folgenden Morgen nimmt. Da die Grössen p und Δ von der Länge der Sonne abhängen, so lässt sich der Ausdruck

$$\frac{\Delta \cdot \theta}{(24)(30)} \left(\frac{\text{tg}\,\varphi}{\text{Sin}\,s} - \text{Cotg}\,s\,\text{Cotg}\,p\right)$$

in zwey Tafeln bringen, deren Argument die Länge der Sonne und die Zwischenzeit θ ist, und von welchen die erste die Werthe von $\frac{\Delta}{720} \cdot \frac{\theta}{\text{Sin}\,s}$ und die andere die Werthe von $\frac{\Delta\,\theta}{720} \cdot \text{Cotg}\,s\,\text{Cotg}\,p$ gibt, wodurch die Berechnung der Correction des Mittags sehr erleichtert wird. Für einen bestimmten Beobachtungsort können beyde Tafeln in eine einzige zusammengezogen werden. Eine solche Tafel ist die Taf. XI. der Sammlung. Für unser Beyspiel ist die halbe Zwischenzeit $3^h\ 43'.7$ und die Länge der Sonne $1^s\ 20° = 50°$, also nach der Tafel

I″ Theil -11.69 tang $\varphi = -13''.09$

II″ - - - - - - - - - - $+\ 2.09$

Correction $-11''.\ 0$ wie zuvor.

3. §. Die Zeit lässt sich auch aus einer einzigen beobachteten Zenithdistanz finden, wenn die Poldistanz des Gestirns und die Polhöhe bekannt ist. Man hat nämlich

$$\text{Cos}\,s = \frac{\text{Cos}\,z - \text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,p}{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,p},$$

oder auch

$$\mathrm{Sin}^2 \frac{s}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{z+\psi-p}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{z-\psi+p}{2}}{\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Sin}\,p},$$

$$\mathrm{Cos}^2 \frac{s}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\psi+p-z}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\psi+p+z}{2}}{\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Sin}\,p},$$

wo $\psi = 90 - \varphi$ die Äquatorhöhe bezeichnet.

Ist das beobachtete Gestirn die Sonne, so ist auch $\frac{1}{15}$ s unmittelbar die wahre Zeit der Beobachtung. Für Fixsterne aber muss noch die Rectascension a derselben bekannt seyn, wo dann $(s + a)$ die gesuchte Sternzeit der Beobachtung gibt, die man nach S. 37 in mittlere Zeit verwandeln, und so die Uhr mit Stern- oder mit mittlerer Zeit vergleichen kann.

In den vorhergehenden Ausdrücken sind a und p die scheinbare Rectascension und Poldistanz des Gestirns, wie sie durch Präcession, Nutation und Aberration bereits geändert sind. Die beobachtete Zenithdistanz aber muss zuerst von dem (durch andere Beobachtungen bekannten) Fehler des Instrumentes befreyt, und um die Refraction (S. 110) vermehrt, und endlich um die Höhenparallaxe (S. 93) vermindert werden. Hat das Gestirn einen merklichen Durchmesser, so beobachtet man sicherer den Rand als den Mittelpunct desselben. Ist dann Z die von den Fehlern des Instrumentes befreyte Zenithdistanz und r die Refraction für die scheinbare Zenithdistanz Z, so wie π die Höhenparallaxe und h der Halbmesser des Gestirns, so ist

$$z = Z + r - \pi \pm h$$

das obere Zeichen von h, wenn der obere Rand des Gestirns beobachtet wurde.

Ex. Den 12. September 1828 wurde in Wien beobachtet um $1^h 34' 10''$ Uhrzeit

Zenithdistanz des obern Randes der Sonne	$48° 34' 34''$
Fehler des Instruments	$-\quad 1\ 13$
	$48° 33' 21''$

Barometer 28.8 Par. Zoll, äusseres Therm. Réaum. + 14.0, inneres 15.0;

Mittlere Horizontalparallaxe der Sonne $8''.8$,

Polhöhe $\varphi = 48^\circ\ 12'\ 35''$
Poldistanz der Sonne im Mittag $85^\circ\ 53'\ 13''$,
Tägliche Vermehrung $0^\circ\ 23'\ 0''$.

$$
\begin{aligned}
\text{Es ist daher } Z &= 48^\circ\ 33'\ 21'' \\
\text{wahre Refraction } &+ \quad 1\ 14.0 \\
\text{Höhenparallaxe } &- \qquad 6.7 \\
\text{Halbmesser } &+ \ 15\ 55.9 \\
\hline
z &= 48^\circ\ 50'\ 24''2
\end{aligned}
$$

Wenn der Stand der Uhr schon nahe bekannt ist, so wird man für die daraus ebenfalls schon nahe bekannte wahre Zeit der Beobachtung die Poldistanz p der Sonne finden, und daraus mittelst der vorhergehenden Gleichungen den Werth von s bestimmen. Ist aber dieser Stand der Uhr noch unbekannt, so kann man für p die Poldistanz der Sonne für den wahren Mittag dieses Tages, also $p = 85^\circ\ 53'\ 13''$ nehmen. Mit diesem Werthe von p und den vorhergehenden Werthen von φ und z findet man

$$
\begin{aligned}
\log \text{Sin} \frac{s}{2} &= 9.3272638 \\
\frac{s}{2} &= 12^\circ\ 15'\ 58''.2 \\
s &= 24^\circ\ 31'\ 56''.4 \text{ in Bogen} \\
s &= \ 1^h\ 38'\ 7''.76 \text{ in Zeit.}
\end{aligned}
$$

Dieser Werth von s ist aber selbst nur genähert, da p nicht für die noch unbekannte Zeit der Beobachtung gefunden werden konnte. Da aber, nach dem Vorhergehenden, die Poldistanz der Sonne in $1^h\ 38'\ 7''.76$ um $0^\circ\ 1'\ 34''$ wächst, so ist der wahre Werth von $p = 85^\circ\ 54'\ 47''$ und damit gibt die obige Gleichung

$$
\begin{aligned}
\log \text{Sin} \frac{s}{2} &= 9.3261057, \text{ also} \\
s &= 1^h\ 37'\ 51''.84 \text{ in Zeit,}
\end{aligned}
$$

und dieses ist die wahre Zeit der Beobachtung, also Correction der Uhr gen wahre Zeit $x = +3'\ 41''.84$.

Es ist ferner die Zeitgleichung im wahren Mittag
des 12. Sept. $0^h\ 3'\ 53''.1$ die mittl. Zeit kleiner
13. - - - 0 4 14.0

also ist für die gefundene wahre Zeit der Beobachtung die

Zeitgleichung	$0^h\ 3'54''.52$
wahre Zeit	1 37 51.84
mittl. Zeit der Beob.	1 33 57.32
Uhrzeit	1 34 10.00
Corr. der Uhr gen mittlere Zeit	$x = -\ 12''.68$

Will man endlich die Correction der Uhr gen Sternzeit so hat man (nach S. 38)

mittl. Zeit	$1^h\ 33'57''\ 32$
Acceleration	+ 15.40
mittl. Rectascension ⊙ im Mittag	11 25 44.60
gesuchte Sternzeit	$12^h\ 59'57''.32$

und daher Corr. der Uhr gen Sternzeit $x = +11^h\ 25'\ 47''.32$. Da man aber den Stand der Uhr gegen eine dieser drey Zeiten gewöhnlich schon sehr nahe kennt, so kann man gleich anfangs mit dem sehr nahen Werth von p die Grösse s berechnen, wodurch die zweyte Berechnung von s überflüssig wird.

II. Ex. Einfacher wird die Auflösung für Fixsterne. Den 11. October 1761 um $10^h\ 36'\ 25''$ Uhrzeit wurde in Alexandrien beobachtet

die Zenitdistanz von α Tauri	$61^h\ 27'\ 30''$
Fehler des Instruments	— 3 0
	61 24 30
Refraction	+ 1 44.2
	z = 61 26 14.2

Des Sterns scheinbarer Ort für diesen Tag ist

$$a = 4^h 22' 16''.35 \text{ und } p = 73^\circ 59' 20''.35$$

und die Polhöhe $\varphi = 31^\circ\ 12'\ 13''$. Mit diesen Grössen gibt die vorhergehende Gleichung

$s = 65^\circ 56\ 13''.93 =$	$19^h\ 36'\ 15''.074$
$a =$	4 22 16.350
Sternzeit der Beob.	$23^h\ 58'31''.424$

Hätte also z. B. die nach Sternzeit gehende Uhr $23^h 58' 20''$ gezeigt, so wäre die Correction der Uhr gen Sternzeit $x = +11''.424$.

Da sie aber nach mittlerer Zeit ging, und $10^h\ 36'\ 25''$ zeigte, so muss die gefundene Sternzeit (nach S. 37) in mittlere Zeit verwandelt werden.

Es ist aber Sternzeit	$23^h 58' 31''.424$
Rectasc. der ⊙ im mittleren Mittag	13 20 43.926
	10 37 47.498
	— 1 44.485
mittlere Zeit der Beobachtung	10 36 3.013
Uhrzeit	10 36 25.0
Corr. der Uhr gen mittl. Zeit	x = — 21.987

4. §. Der grösseren Sicherheit wegen, wird man auch hier mehrere Beobachtungen der Zeitbestimmung zu Grunde legen. Folgen diese in kleineren Intervallen von z. B. vier bis sechs Zeitminuten auf einander, so wird man von je zwey oder je drey auf einander folgenden Zenithdistanzen und Beobachtungszeiten das Mittel nehmen, und so dieses Mittel der Zenithdistanzen als eine einzige Beobachtung ansehen, die zur Zeit des Mittels jener drey oder vier Beobachtungszeiten gemacht worden ist. Diess setzt voraus, dass sich die Höhen des Gestirns mit der Zeit gleichförmig ändern, eine Voraussetzung, die bey kürzeren Intervallen in den meisten Fällen ohne Nachtheil angenommen werden kann.

Will man genauer verfahren, so wird man jene beobachteten Zenithdistanzen auf eine gemeinschaftliche Zeit reduciren, und zwar am bequemsten auf die Zeit T, der Mitte aller jener Beobachtungszeiten. Sind $t, t', t'' \ldots$ die einzelnen Beobachtungszeiten, also $T = \frac{t + t' + t'' + \ldots}{N}$, wo N die Anzahl der Beobachtungen ist, so hat man, wenn man die Bedeutung der Grössen m und n aus S. 48 beybehält, für die Reduction der ersten Zenithdistanz z, die zur Zeit t angestellt wurde, auf die gesuchte Zenithdistanz Z zur Zeit T

$$Z = z + m(T - t) + \tfrac{1}{2}(n - m^2 \operatorname{Cotg} z)(T - t)^2 + .$$

Eben so gibt die zweyte und dritte Beobachtung

$$Z = z' + m(T - t') + \tfrac{1}{2}(n - m^2 \operatorname{Cotg} z)(T - t')^2 +$$
$$Z = z'' + m(T - t'') + \tfrac{1}{2}(n - m^2 \operatorname{Cotg} z)(T - t'')^2 + \text{u. s. w.}$$

Da aber $T = \frac{t + t' + t'' +}{N}$ ist, so hat man

$$(T - t) + (T - t') + (T - t'') + \ldots = 0,$$

und daher, wenn man die vorhergehenden Gleichungen addirt,

$$Z = \frac{z + z' + z'' +}{N}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(n - m^2 \operatorname{Cotg} z)}{N} \{(T - t)^2 + (T - t')^2 + (T - t'')^2 + \ldots\}$$

und dieses ist die Zenithdistanz Z, welche zur Zeit

$$T = \frac{t + t' + t'' +}{N}$$

gehört, und mit welcher man daher den Werth von s nach der Gleichung des §. 3 suchen wird.

I. Auch kann man diese Art der Zeitbestimmung zur Ausübung bequemer machen, wenn man für mehrere willkürlich gewählte Stundenwinkel die scheinbare (durch Refraction und Parallaxe veränderte) Zenithdistanz z' des Gestirns durch Rechnung bestimmt, und dann das Instrument auf diese Zenithdistanz stellt und abwartet, bis das Gestirn an dem Faden des Fernrohres erscheint, wo dann die Uhrzeit der Beobachtung, mit dem anfangs angenommenen Stundenwinkel verglichen, sofort die Correction der Uhr gibt.

Man sucht nämlich für den gewählten Stundenwinkel s die Zenithdistanz z durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{Cos} s \operatorname{Cotg} \varphi,$$

$$\operatorname{Cos} z = \frac{\operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos} x} \operatorname{Cos} (x - p).$$

Ist dann z' die Zenithdistanz des oberen Sonnenrandes, so ist

$$z' = z - \text{Halbmesser} \odot - \text{Refraction} + \text{Höhenparallaxe},$$

wo die Refraction nicht für die scheinbare sondern für die wahre Zenithdistanz z — Halbmesser ⊙ gesucht werden muss. Wäre z. B. diese wahre Zenithdistanz gleich 68° 30', so gibt die Tafel die Refraction 2' 31".5, also die scheinbare Zenithdistanz 68° 27' 28".5 und mit dieser letzten findet man in der Tafel die wahre, in der letzten Gleichung anzuwendende Refraction 2' 31". 2. Berechnet man für seinen Beobachtungsort in einer Tafel die Werthe von x und log $\frac{\operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos} x}$ etwa von 10 zu 10 Zeitminuten für die gewöhnlichen Beobachtungsstunden, so wird dadurch die Berechnung der Zeitbestimmung sehr erleichtert.

5. §. Um zu sehen, welche Gestirne und an welchem

Orte des Himmels sie vortheilhaft zur Bestimmung der Zeit sind, wollen wir die Gleichung

$$\text{Cos}\, z = \text{Sin}\, \varphi\, \text{Cos}\, p + \text{Cos}\, \varphi\, \text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, s$$

in Beziehung auf alle in ihr enthaltenen Grössen differentiiren. Man erhält, wenn v der Winkel des Declinations- mit dem Vertikalkreise und ω das Azimut ist,

$$d\,s = \frac{d\,z - d\,p\,\text{Cos}\, v - d\,\varphi\,\text{Cos}\,\omega}{\text{Sin}\, v\, \text{Sin}\, p} \text{ oder}$$

$$d\,s = \frac{d\,z - d\,p\,\text{Cos}\, v - d\,\varphi\,\text{Cos}\,\omega}{\text{Sin}\,\omega\, \text{Cos}\,\varphi}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass man alle dem Pole nahen Gestirne, für die Sin p klein ist, zur Zeitbestimmung vermeiden müsse, weil der geringste Fehler in z, p oder φ schon einen sehr beträchtlichen Fehler in der gesuchten Grösse s hervorbringen kann. Eben so müssen die dem Äquator näheren Sterne, die allein zur Zeitbestimmung schicklich sind, nicht in der Nähe des Meridians, wo Sin ω sehr klein ist, sondern so weit als möglich von dem Meridian, am besten in ihrem ersten Vertikalkreise, wo ω gleich 90° oder gleich 270° ist, gewählt werden. Je grösser übrigens die Polhöhe des Beobachtungsortes, desto misslicher ist die Zeitbestimmung durch Höhenbeobachtungen, und unter dem Pole ist sie ganz unbrauchbar, weil dort Cos $\varphi = 0$ ist, und weil für die Bewohner des Poles die Gestirne ihre Höhe nicht mehr ändern.

6. § Die letzte Bemerkung macht eine Methode nothwendig, auch in höheren Breiten die Sonne, die sich besonders auf Reisen zur Zeitbestimmung vorzüglich eignet, auf eine andere Art zu denselben Zwecken anzuwenden. Wir wollen dazu die Distanzen der Sonne von irgend einem seiner Lage nach bekannten terrestrischen Objecte wählen.

Sey Ω und Z das als bekannt vorausgesetzte Azimut und die Zenithdistanz des terrestrischen Gegenstandes z. B. einer entfernten Thurmspitze. Daraus findet man den Stundenwinkel S und die Poldistanz P desselben Gegenstandes durch folgende Ausdrücke, wo $\psi = 90 - \varphi$ die Äquatorhöhe des Beobachters bezeichnet:

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{Sin}\, \frac{1}{2}(\psi - Z)}{\text{Sin}\, \frac{1}{2}(\psi + Z)}\, \text{tg}\, \tfrac{1}{2}\,\Omega,$$

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,P = \frac{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\psi + Z)}{\text{Cos}\,x}\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\Omega,$$

$$\text{Sin}\,S = \frac{\text{Sin}\,\Omega\,\text{Sin}\,Z}{\text{Sin}\,P}.$$

Hat man nun die Distanz Δ eines bekannten Gestirns von dem irdischen Objecte beobachtet, so findet man den Stundenwinkel s des Gestirns, dessen Poldistanz p ist, durch die oben S. 171 gegebene analoge Gleichung

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(s - S) = \sqrt{\frac{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\Delta + P - p)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\Delta + p - P)}{\text{Sin}\,P\,\text{Sin}\,p}}:$$

Ist $\tfrac{1}{2}(s - S)$ nahe an 90°, so wird man besser den bekannten ähnlichen Ausdruck von $\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(s - S)$ zur Bestimmung von s wählen.

Noch ist es nöthig, auf die Refraction des irdischen Objects sowohl, als des Gestirns Rücksicht zu nehmen. Die irdische Strahlenbrechung ist aber viel zu ungewiss und ihre Variation, besonders wenn das Object nicht zu weit entfernt ist, viel zu gering, um sie nicht in den meisten Fällen vernachlässigen zu können. Man wird daher die Grössen S und P im Allgemeinen als constant annehmen. Die Refraction des Gestirns, oder vielmehr die Wirkung dieser Refraction auf die Distanz Δ kann auf folgende Art berücksichtiget werden.

Nennt man in dem sphärischen Dreyecke zwischen dem Zenithe, dem Gestirne und dem Objecte den Winkel an dem Gestirne O, so ist (S. 4)

$$\frac{d\,\Delta}{d\,z} = \text{Cos}\,O:$$

das heisst

$$d\,\Delta = d\,z\,\frac{(\text{Cos}\,Z - \text{Cos}\,\Delta\,\text{Cos}\,z)}{\text{Sin}\,\Delta\,\text{Sin}\,z};$$

oder endlich, da Z nahe gleich 90° ist,

$$d\,\Delta = -d\,z\,.\,\text{Cotg}\,\Delta\,\text{Cotg}\,z,$$

wo d z die durch die Tafeln gegebene Refraction für die Zenithdistanz z ist.

Ex. Sey $\psi = 39°\,3'\,43''$, $\Omega = 35°\,47'\,4''$ und
$Z = 90°\,24'\,28''$ so hat man
$S = 43°\;\;4'\,31''.5$ und $P = 121°\,6'\,43''.2$.

Um die Uhrzeit $21^h\,15'\,40''$ am 11. Februar 1801 hat

man die Distanz des Mittelpuncts der Sonne von diesem Objecte $\varDelta = 78^\circ\ 9'\ 38''$ beobachtet. Man suche die Correction der Uhr.

Die um dieselbe Zeit beobachtete oder auch durch Rechnung gefundene Zenithdistanz der Sonne ist $z = 74^\circ\ 25'.2$, also auch $d\varDelta = -11''.4$ und daher die wahre Distanz

$$\varDelta = 78^\circ\ 9'\ 26''.6.$$

Die wahre Poldistanz der Sonne aber ist

$$p = 104^\circ\ 7'\ 14''.7,$$

woraus folgt:

$$\frac{s-S}{2} = -42^\circ\ 15'\ 51''.9$$

$$\frac{S}{2} = \quad 21\ \ 32\ \ 15.75$$

$$\frac{s}{2} = -20\ \ 43\ \ 36.15$$

$$s = -41\ \ 27\ \ 12.30$$

oder in Zeit $s = 21^h\ 14'\ 11''.18$

Uhrzeit $\quad 21\ \ 15\ \ 40$

Correction der Uhr $x = -\quad 1\ \ 28.88$

7. §. Das Vorhergehende setzt das Azimut des irdischen Objects als gegeben voraus. Es kann aber schon hier bemerkt werden, dass man die Grössen S und P eines terrestrischen Objectes, auch ohne Ω und Z zu kennen, ebenfalls aus blossen zwey beobachteten Distanzen $\varDelta$ und $\varDelta'$ des Gestirns von diesem Objecte, verbunden mit der Zwischenzeit der Beobachtungen ableiten kann.

Da die directe Auflösung dieses Problems umständlich ist, so wollen wir ihr folgende indirecte Methode, die Grössen S und P zu bestimmen, vorziehen.

Mit einem genäherten Werthe von P suche man die Grössen x und x′ aus den Gleichungen

$$\text{Cos}\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(P+p+\Delta)\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(P+p-\Delta)}{\text{Sin}\,P\,\text{Sin}\,p}},$$

$$\text{Cos}\,\frac{x'}{2} = \sqrt{\frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(P+p'+\Delta')\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(P+p'-\Delta')}{\text{Sin}\,P\,\text{Sin}\,p'}},$$

wo $\varDelta$ und $\varDelta'$ die zwey beobachteten Distanzen der beyden

Gestirne, und p p′ die Poldistanzen der Gestirne sind. Wurde dasselbe Gestirn zweymal beobachtet, so ist $p' = p$.

Sey (fig. 8) Z das Zenith, N der Pol und A das terrestrische Object, S und S′ das Gestirn, also
$ZNA = S$, $ZNS = s$, $ZNS' = s'$ und $ANS = x$, so wie $ANS' = x'$.

Wurde in der vorhergehenden Annahme der Werth von P gut gewählt, so ist $S = s + x$ und auch $S = s' + x'$. Ist aber P fehlerhaft, und ist d P der noch unbekannte Fehler von P, so hat man, da in dem Dreyecke N S A die zwey Seiten p und $\varDelta$ constant sind (Einl. S. 4, II.)

$$dx = dP \frac{\text{Cotg}\,\omega}{\text{Sin}\,P}, \quad \text{und } dx' = dP \frac{\text{Cotg}\,\omega'}{\text{Sin}\,P},$$

wo ω und ω′ die Winkel an A sind, so dass man hat

$$\text{Sin}\,\omega = \frac{\text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,x}{\text{Sin}\,\Delta}, \quad \text{und Sin}\,\omega' = \frac{\text{Sin}\,p'\,\text{Sin}\,x'}{\text{Sin}\,\Delta'};$$

und dann sind die wahren Werthe von S

$$S = s + x + dP.\frac{\text{Cotg}\,\omega}{\text{Sin}\,P} \text{ und } S = s' + x' + dP.\frac{\text{Cotg}\,\omega'}{\text{Sin}\,P}.$$

Setzt man beyde einander gleich, so findet man den Werth von d P, da $s' - s = t$ gleich der gegebenen Zwischenzeit der Beobachtungen ist.

Man wird daher so verfahren: man suche zuerst die Grössen ω und A durch die Gleichungen

$$\text{Sin}\,\omega = \frac{\text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,x}{\text{Sin}\,\Delta}, \qquad A = \frac{\text{Cotg}\,\omega}{\text{Sin}\,P} \text{ und eben so}$$

$$\text{Sin}\,\omega' = \frac{\text{Sin}\,p'\,\text{Sin}\,x'}{\text{Sin}\,\Delta'}, \qquad A' = \frac{\text{Cotg}\,\omega'}{\text{Sin}\,P},$$

so hat man d P aus

$$dP = \frac{x - x' - t}{A - A'},$$

und die wahre Poldistanz $P' = P + dP$, so wie endlich den wahren Werth von

$$s - S = x - A.dP \text{ oder}$$
$$s' - S = x' - A'.dP.$$

Ex. Uhrzeit	wahre Distanz
$2^h\,2'\,10''$	$\varDelta = 52°\,14'\,19''.52$
18 2 10	$\varDelta' = 90\quad 0\quad 0''.00$

$p = 45°$ und P nahe $= 89°\,56'$.

Da aus andern Beobachtungen bekannt war, dass die Uhr in beyden Beobachtungen um $1' 40''$ accelerirte, so sind die Stundenwinkel $s = 2^h 0' 30'' = 30° 7' 30''$ westlich und

$s = 18^h 0' 30'' = -89° 52' 30''$ östlich.

Wir erhalten also

$$\tfrac{1}{2} x = 15° 3' 59''.47 \qquad \tfrac{1}{2} x' = -45° 2' 0''.0$$
$$\omega = 26\ 40'\ 50'' \qquad \omega' = -45\ 0\ 0$$
$$A = 1.98996 \qquad A' = -1$$

und daher $dP = \frac{718 \cdot 94}{2 \cdot 98996} = 240''.4514$;

also auch wahres $P' = 89° 56' + dP = 90° 0' 0''.45$

$$A\,dP = 7' 58''.49,$$
$$A'\,dP = -4' 0''\,45 \text{ und}$$
$$s - S = 30°\ 0' 0''.45$$
$$s' - S = -89\,59\,59.55$$

oder wahres $S = 0° 7' 29''.55$

Man hätte aber in diesem bloss fingirten Beyspiele finden sollen $P = 90° 0' 0''$ und $S = 0° 7' 30''$.

Um zu sehen, in welchen Fällen man die Grössen P und S mit Schärfe bestimmen kann, hat man in dem Dreyecke SNA, wenn $SNA = S - s$ und p constant ist (Einl. S. 4),

$$d\Delta = dP \operatorname{Cos} \omega,$$

und wenn p und P constant ist,

$$d\Delta = dS \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} \omega;$$

also ist auch

$$d\Delta = dP \operatorname{Cos} \omega + dS \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} \omega,$$

und eben so $d\Delta' = dP \operatorname{Cos} \omega' + dS \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} \omega'$,

und aus diesen beyden Gleichungen folgt sofort

$$\left.\begin{aligned} dP &= \frac{d\Delta \operatorname{Sin} \omega' - d\Delta' \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Sin} (\omega' - \omega)} \\ dS &= \frac{d\Delta \operatorname{Cos} \omega' - d\Delta' \operatorname{Cos} \omega}{\operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} (\omega' - \omega)} \end{aligned}\right\},$$

also die Bestimmung von P und S desto sicherer, je näher $(\omega' - \omega)$ an 90 oder 270° und je näher P an 90° ist.

8. §. Das einfachste und zugleich sicherste Mittel zur Zeitbestimmung ist das Mittagsrohr, d. h. ein Fernrohr, welches sich auf einer horizontalen Axe in der Ebene des Meridians bewegt. Wir werden unten sehen, wie man die Fehler dieses Instrumentes und ihren Einfluss auf die Beobach-

tungen finden kann. Hier wollen wir es von diesen Fehlern frey voraussetzen, und bloss bemerken, dass man die Uhrzeiten des Durchgangs der Sterne durch den im Brennpuncte des Fernrohrs vertikal gestellten Faden beobachtet, wo dann der Unterschied dieser Uhrzeit von der bekannten Sternzeit oder mittleren Zeit der Culmination dieses Gestirns die Correction der Uhr gibt.

Wenn die Uhr nach Sternzeit geht, so ist die Correction x der Uhr sofort gleich $x = a - t$, wo a die scheinbare Rectascension des Sterns für den Beobachtungstag und t die Uhrzeit der Beobachtung ist.

Geht aber die Uhr nach mittlerer Zeit, so wird man die Sternzeit der Culmination, die (S. 25) immer gleich der scheinbaren Rectascension a ist, zuerst nach S. 37 in die mittlere Zeit m der Culmination verwandeln, und dann ist die Correction der Uhr gegen mittlere Zeit $x = m - t$.

Ex. I. Den 15. December 1828 wurden in Wien an einer Sternuhr folgende Culminationen mit dem Mittagsrohre beobachtet.

	Uhrzeit t	scheinb. Rectasc. a
α Pegasi	$22^h 57' 10''.75$	$22^h 56' 14''.89$
α Androm.	0 0 30 . 22	23 59 34 .40
α Arietis	1 58 30 . 06	1 57 34 .21

Daraus folgt

α Pegasi Correction der Uhr $x = a - t = -55''.86$
α Androm. - - - - - - - - - - - - -55.82
α Arietis - - - - - - - - - - - - - -55.85

Im Mittel $x = -55''.84$ um $0^h 18'.7$ Uhrzeit.

Ex. II. Den 10. März 1828 wurden eben da folgende Culminationen an einer mittleren Uhr beobachtet:

	Uhrzeit t	scheinb. Rectasc. a
α Orionis	$6^h 32' 4''.35$	$5^h 45' 53''.02$
α Gemin.	8 9 33 . 71	7 23 38 . 41
α Hydrae	10 4 46 . 63	9 19 10 . 20

Die Rectascension A der mittleren Sonne für den mittleren Mittag Wiens am 10. März ist $A = 23^h 12' 20''.80$.

Man hat daher für α Orionis (S. 38)

$$
\begin{array}{rl}
\text{Sternzeit} & 5^h\ 45'\ 53''.02 \\
A = & 23\ \ 12\ \ 20.80 \\
\hline
 & 6\ \ 33\ \ 32.22 \\
\text{Acceleration} & -\ \ \ 1\ \ \ 4.48 \\
\hline
m = & 6\ \ 32\ \ 27.74 \ \text{mittlere Zeit}
\end{array}
$$

und eben so findet man für

$$\alpha\ \text{Gemin.}\ m = 8^h 9' 57''.12$$
$$\alpha\ \text{Hydrae}\ m = 10\ 5\ 10.00$$

Es ist daher die Correction x der Uhr aus

$$
\begin{array}{ll}
\alpha\ \text{Orionis}\ x = m - t = & +23''.39 \\
\alpha\ \text{Gemin.}\ - - - - - - & 23.41 \\
\alpha\ \text{Hydrae}\ - - - - - - & 23.37
\end{array}
$$

Im Mittel $x = +23''.39$ für $8^h\ 15'.6$ Uhrzeit.

Kennt man eben so den Werth von x für irgend eine Stunde der vorhergehenden oder nachfolgenden Tage, so wird man dadurch jede beobachtete Uhrzeit in Stern- oder mittlere Zeit verwandeln können.

I. Man sieht, wie viel bequemer eine nach Sternzeit gehende Uhr, als eine mittlere Uhr ist, aus welcher Ursache auch jetzt auf allen Sternwarten die Sternuhren allgemein im Gebrauche sind.

II. Die so erlangte Kenntniss des Werthes von x wird zugleich das Mittel geben, die Rectascensionen der an diesen Tagen an dem Mittagsrohre beobachteten Planeten zu bestimmen. Wurde z. B. den 16. December 1828 Merkur um $16^h\ 36'\ 5''.96$ Uhrzeit beobachtet, und ist die tägliche Zunahme von x gleich $0''.70$, so hat man nach Ex. I.

$$
\begin{array}{ll}
15.\ \text{Dec. um}\ 0^h\ 18'\,7\ \text{Corr. der Uhr} & -55''.84 \\
\text{Zunahme in}\ 16^h\ 55'\,5\ - - - - - & 0.47 \\
\hline
\text{um}\ 16^h\ 36' - - - - - - - - & x = -56''.31
\end{array}
$$

Es ist daher

$$
\begin{array}{rl}
\text{beobachtete Uhrzeit} & 16^h\ 36'\ \ 5''96 \\
 & x = -56.31 \\
\hline
\text{gesuchte scheinbare Rectasc. ☿} = & 16^h\ 35'\ \ 9''.65\ \text{in Zeit}, \\
 & 248°\ 47'\ 24''.75\ \text{in Bogen.}
\end{array}
$$

Sucht man endlich noch die mittlere Zeit dieser Beobachtung Mercurs, so ist für den Mittag des 16. Decembers

$$
\begin{array}{rr}
A = & 17^h\,40'\,12''.60 \\
\text{Sternzeit a} = & 16\;\;35\;\;\;9.65 \\
\hline
 & 22\;\;54\;\;57.05 \\
\text{Acceleration} & 3\;\;45.26 \\
\hline
\text{gesuchte mittlere Zeit d Beob. ☿} = & 22\;\;51\;\;11.79
\end{array}
$$

9. §. Wenn man aber mit keinem Mittagsrohre versehen ist, so kann man die Zeitbestimmung, nach Olbers Vorschlag, durch die Beobachtung der Verschwindung der Fixsterne hinter senkrechten terrestrischen Gegenständen erhalten. Dass dieser Gegenstand eine bestimmte Entfernung von dem Beobachter und eine beträchtliche Höhe haben, und dass der Beobachter sein nur schwach vergrösserndes Fernrohr immer in dieselbe Lage z. B. in denselben Winkel seines Fensters bringen soll, ist für sich klar.

Kennt man nämlich durch eine der vorhergehenden Beobachtungen die Sternzeit der Verschwindung eines Sterns hinter dem terrestrischen Gegenstande für irgend einen ersten Tag, so wird der Stern, so lange sich seine Lage am Himmel nicht ändert, auch alle folgende Tage um dieselbe Sternzeit verschwinden. Gebraucht man aber eine mittlere Uhr, so wird der Stern jeden folgenden Tag um $0^h\,3'\,55''.908$ mittlere Zeit früher verschwinden.

So fand Olbers die Correction der nach mittlerer Zeit gehenden Uhr aus correspondirenden Sonnenhöhen (S. 169) am 6. September 1800 gleich $x = +8'\,57''.6$. An demselben Tage beobachtete er die Verschwindung von δ Coronae um $11^h\,14'\,20''.7$ Uhrzeit, also um $11^h\,23'\,18''.3$ mittlerer Zeit, und daraus findet sich die Sternzeit der Verschwindung (S. 38) gleich $22^h\,26'\,21''.78$.

Den 12. September wurde die Verschwindung beobachtet um $10^h\,49'\,21''$. Die Acceleration der Fixsterne für sechs Tage ist $6\,(3'\,55''.908) = 23'\,35''.4$; man hat daher

$$
\begin{array}{rl}
11\;\;23'\,18''.3 & \\
23\;\;35.4 & \\
\hline
10\;\;59\;\;42.9 & \text{mittlerer Zeit den 12. September} \\
10\;\;49\;\;21.0 & \text{Uhrzeit} \\
\hline
+\;\;10\;\;21.9 & \text{Correction der Uhr.}
\end{array}
$$

Um nicht immer von demselben Sterne abzuhängen, kann man noch mehrere andere zu verschiedenen Stunden der Nacht beobachten, und aus der bereits bekannten Sternzeit der Verschwindung von δ Coronae und dem Unterschiede der Beobachtungszeiten, die Sternzeiten der Verschwindungen der übrigen Sterne ableiten.

I. Um das Azimut ω des Sterns und den Winkel v seines Declinationskreises mit dem Vertikalkreise zu finden, hat man für den 6. September 1800

δ Coronae scheinbare Rectasc. $a = 15^h\,41'\,13''.58$
scheinbare Poldistanz $p = 63°\,18'\,29''.\,0$

Daher ist der Stundenwinkel s des Sterns zur Zeit seiner Verschwindung $s = 22^h\,26'\,21''.78 - a = 6^h\,45'\,8''.20$ oder in Bogen $s = 101°\,17'\,3''$. Aus s, p und der Polhöhe $\varphi = 53°\,4'\,38''$ findet man (S. 27) das Azimut des Sterns zur Zeit seiner Verschwindung $\omega = 64°\,56'\,21''.4$ und den Winkel $v = 37°\,31'$.

Ist dann nach einiger Zeit, wenn sich die Lage des Sterns ändert, die neue scheinbare Rectascension a' und die Poldistanz p', so ist die neue Sternzeit der Verschwindung gleich der alten $+ (\alpha' - \alpha) + \frac{1''}{15}(p' - p) \cdot \frac{\tan v}{\sin p}$. So hat man für den 6. September 1801 für δ Coronae $a' = 15^h\,41'\,16''.38$ und $p' = 63°\,18'\,42''.2$, also $a' - a = + 2''.80$ und $p' - p$ gleich $+ 13''.2$ und daher $\frac{1}{15}(p' - p)\frac{\text{tg}\,v}{\sin p} = 0''.76$, also auch

Sternzeit der Verschwindung 6. Sept 1800	$22^h\,26'\,21''.78$
	$+\ 2.80$
	$+\ 0.76$
Sternzeit der Verschwindung 6. Sept. 1801	$22\ \ 26\ \ 25.34$

Vorlesung II.

Bestimmung der Polhöhe aus Beobachtungen.

1. §. Um vor allem zu sehen, in welcher Gegend des Himmels man die Gestirne zur vortheilhaftesten Bestimmung der Polhöhe wählen soll, hat man, wenn man die Gleichung

$$\operatorname{Cos} z = \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} p + \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} s$$

in Beziehung auf alle in ihr enthaltenen Grössen differentiirt,

$$d\varphi = \frac{dz}{\operatorname{Cos} \omega} - dp \frac{\operatorname{Cos} v}{\operatorname{Cos} \omega} - ds \frac{\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Cos} \omega},$$

wo ω das Azimut und v der Winkel des Vertikalkreises mit dem Declinationskreise ist. Aus dieser Gleichung folgt im Allgemeinen, dass die Polhöhe am sichersten aus Beobachtungen in der Nähe des Meridians, wo nahe $\omega = 0$ oder 180 ist, gefunden wird.

Wir werden uns also zuvörderst auf die in dem Meridian selbst beobachteten Zenithdistanzen beschränken, um daraus die Polhöhe abzuleiten.

2. §. Hat man die Zenithdistanz z des oberen Sonnenrandes im Meridian beobachtet, so ist die verbesserte Zenithdistanz z' des Mittelpuncts derselben

$$z' = z + \text{Fehl. d. Instr.} + \text{Refr.} \pm \text{Halbm.} \odot - \text{Höhenparallaxe}$$

das untere Zeichen, wenn man den unteren Rand der Sonne beobachtet hat. Die Höhenparallaxe ist gleich

$$\frac{8''.55}{r} \operatorname{Sin} z,$$

wo r die Entfernung der Sonne von der Erde ist. Kennt man so z' so ist die gesuchte Äquatorhöhe $\psi = p - z'$, wo p die bekannte Poldistanz der Sonne bezeichnet.

Ex. Den 10. August 1828 wurde in Wien die Meridian-

Zenithdistanz des obern Sonnenrandes $z = 32° 23' 38''.72$ beobachtet, Barometer $b = 27^z.5$, äusseres Therm. R. $t = 20°.0$, inneres Therm. Réaum. $t' = +18°.0$, Poldistanz der Sonne $p = 74° 27' 58''$, Halbmesser der Sonne $15' 48''.80$.
$\log r = 0.00571$, Fehler des Instruments (der sogenannte Collimationsfehler) $+36''.52$.

Wir haben daher

beob. Zenith des obern Randes $z =$	$32° 23' 38'' 72$
Instr. Fehler	$+ 36.52$
	$32\ 24\ 15.24$
wahre Refraction	$+ 34.76$
Halbmesser	$+ 15\ 48.80$
Höhenparallaxe	$- 5.62$
$z' =$	$32\ 40\ 33.18$
$p =$	$74\ 27\ 58$
$\psi =$	$41\ 47\ 24.82$
Polhöhe $\varphi = 90 - \psi =$	$48° 12' 35''.18$

Hat man statt der Sonne einen Fixstern beobachtet, so fällt die Berücksichtigung des Halbmessers und der Höhenparallaxe weg.

Dass man auf dieselbe Weise, wenn die Äquatorhöhe ψ bereits aus andern Beobachtungen bekannt ist, die Poldistanz $p = \psi + z'$ des beobachteten Gestirns finden könne, ist für sich klar. So wurde an demselben Tage beobachtet

α Lyrae $z =$	$9° 33' 44''.61$
Collimationsfehler	$+ 36.52$
	$9\ 34\ 21.13$
Refraction	$+ 10.10$
$z' =$	$9\ 34\ 31.23$
Äquatorhöhe von Wien $\psi =$	$41\ 47\ 25.00$
$p =$	$51\ 21\ 56.23$

und diess ist die scheinbare Poldistanz von α Lyrae für den 10. August 1828. Um sie auf die mittlere Poldistanz P für den Anfang des Jahres 1829 zu bringen, wird man die Aberration und die beyden Nutationen, so wie die Präcession (S. 88) mit verkehrten Zeichen zu dem vorhergehenden Werthe von p hinzusetzen. Es ist aber den 10. August 1828 Länge der

Sonne $\odot = 137°.7$ und Länge des Mondknotens $☊ ☾ = 199°.9$ und die jährliche Änderung der Poldistanz $= -2''.96$.

Wir haben daher

scheinb. Poldistanz 10. August 1828	$p =$	$51° 21' 56''.23$
Aberration und Solarnutation	$+$	11.99
Lunarnutation	$+$	8.70
Präcession	$-$	1.10
	$P =$	$51° 22' 15''.82$

mittlere Poldistanz für 1829.0

3. §. Ist z die beobachtete und von dem Fehler des Instruments und der Refraction befreyte Zenithdistanz, so hat man, wenn man die Grössen z, p und ψ immer positiv nimmt (S. 47),

für Culminationen auf der Südseite des Zeniths $\psi = p - z$
und auf der Nordseite des Zeniths für untere
Culminationen - - - - - - - - $\psi = z - p$
und für obere Culminationen - - - - - - $\psi = z + p$

Nennt man also a den constanten Fehler des Instruments und r die Refraction und endlich $\mathfrak{z}$ die an dem Instrumente abgelesene Zenithdistanz, so ist

für die Südseite - - - $\psi = p - \mathfrak{z} - a - r \ldots\ldots$ I
für untere Culminationen $\psi = \mathfrak{z}' + a + r' - p' \ldots.$ II
und für obere Culminationen $\psi = p'' + \mathfrak{z}'' + a + r'' \ldots.$ III

Die halbe Summe von I und II oder von I und III gibt

$$\left.\begin{array}{l}\psi = \frac{1}{2}(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}) - \frac{1}{2}(p' - p) + \frac{1}{2}(r' - r) \\ \text{oder} \\ \psi = \frac{1}{2}(\mathfrak{z}'' - \mathfrak{z}) + \frac{1}{2}(p'' + p) + \frac{1}{2}(r'' - r)\end{array}\right\} \ldots\ldots(A)$$

Die zwey letzten Gleichungen zeigen, wie man die wahre Polhöhe ohne Kenntniss der Grösse a finden kann. Wählt man die beyden Sterne so, dass ihre Zenithdistanzen $\mathfrak{z}'\, \mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{z}''\, \mathfrak{z}$ nahe gleich sind, so braucht man nur die Differenzen der Refractionen $r' - r$ oder $r'' - r$ zu kennen, und diese Differenzen kann man immer mit grosser Sicherheit aus jeder bessern Refractionstafeln nehmen, wenn gleich die absoluten Werthe von r und r′ noch vielleicht einer beträchtlichen Verbesserung bedürfen.

Diese Methode, die Polhöhe aus zwey nahe in gleicher Höhe, im Norden und Süden vom Zenithe culminirenden

Sternen zu bestimmen ist zuerst von H o r r e b o w vorgeschlagen worden. Sie ist, wie man sieht, von dem Fehler a des Instruments unabhängig, und setzt bloss die Kenntniss der Differenz der beyden, einander nahe gleichen Refractionen, aber dafür die genaue Kenntniss der beyden Poldistanzen voraus. Der Fehler a kann dann zwar aus denselben Beobachtungen gefunden werden, da die halben Differenzen der Gleichungen I, II und I, III geben

$$a = \tfrac{1}{2}(p' + p) - \tfrac{1}{2}(z' + z) - \tfrac{1}{2}(r' + r) \text{ oder}$$
$$a = -\tfrac{1}{2}(p'' - p) - \tfrac{1}{2}(z'' + z) - \tfrac{1}{2}(r'' + r),$$

aber nicht mit derselben Sicherheit, da hier die Kenntniss der absoluten Refractionen und der Poldistanzen vorausgesetzt wird.

Die Summe der Gleichungen II und III gibt

$$\psi = \tfrac{1}{2}(z'' + z') + \tfrac{1}{2}(p'' - p') + \tfrac{1}{2}(r'' + r) + a$$

eine zur Bestimmung von ψ nur dann vortheilhafte Gleichung, wenn die beyden absoluten Refractionen und der Fehler des Instrumentes genau bekannt sind. Hat man denselben Stern über und unter dem Pole beobachtet, so ist $p'' = p'$ und daher

$$\psi = \tfrac{1}{2}(z'' + z') + \tfrac{1}{2}(r'' + r) + a \ldots\ldots (B)$$

woraus man die Polhöhe des Beobachtungsortes ohne Kenntniss der Poldistanzen der Sterne finden kann, wenn r r'' und a genau bekannt ist.

4. §. Die Gleichungen (A) zeigen, dass man die Polhöhe unabhängig von dem Fehler a des Instrumentes findet, wenn man zwey Sterne von bekannter Poldistanz auf den beyden entgegengesetzten Seiten des Zeniths beobachtet, und die Gleichung (B) zeigt, dass man die Polhöhe unabhängig von der Poldistanz des Sterns finden kann, wenn man denselben Stern über und unter dem Pole beobachtet.

Um beyde Vortheile zu vereinigen, wird man daher einen dem Pole nahen Stern in seinen b e y d e n Culminationen und zwar sowohl in der gewöhnlichen senkrechten Lage des Kreises, als auch in der um 180 im Azimute geänderten Stellung desselben beobachten. Man hat nämlich, da durch die Umwendung des Kreises der Fehler a sein Zeichen ändert, für die o b e r e C u l m i n a t i o n, wenn die getheilte Seite des Kreises z. B. gegen Ost gerichtet ist, oder

$$\text{Kreis Ost} \ldots \psi = z + a + r + p \ldots (1)$$
$$\text{West} \ldots \psi = z' - a + r + p \ldots (2)$$

und eben so für die untere Culmination

$$\text{Kreis Ost} \ldots \psi = z'' + a + r' - p \ldots (3)$$
$$\text{West} \ldots \psi = z''' - a + r' - p \ldots (4)$$

Die Summe dieser vier Gleichungen gibt

$$\psi = \tfrac{1}{4}(z''' + z'' + z' + z) + \tfrac{1}{2}(r' + r) \ldots (a)$$

und die Summe der 1. und 3., weniger der 2. und 4. Gleichung gibt

$$a = \tfrac{1}{4}(z''' - z'') + \tfrac{1}{4}(z' - z) \ldots\ldots (b)$$

und durch die beyden letzten Gleichungen erhält man die wahren Werthe von ψ und a ohne Kenntniss der Poldistanz p des Gestirns, die vielmehr durch diese Gleichungen (1)... (4) selbst gegeben wird. So gibt die Gleichung (1)

$$p = \psi - z - a - r,$$

oder wenn man die beyden vorhergehenden Werthe von ψ und a substituirt,

$$p = \tfrac{1}{2}(z'' - z) + \tfrac{1}{2}(r' - r),$$

und eben so gibt die Gleichung (2)

$$p = \tfrac{1}{2}(z''' - z') + \tfrac{1}{2}(r' - r),$$

also im Mittel

$$p = \tfrac{1}{4}(z''' + z'') - \tfrac{1}{4}(z' + z) + \tfrac{1}{2}(r' - r) \ldots (c)$$

I. Diese Ausdrücke setzen voraus, dass alle vier Beobachtungen an einem einzigen Tag gemacht worden sind, weil sonst die Werthe von r in (1) und (2) so wie die von r' in (3) und (4) wegen der Constitution der Atmosphäre und die Werthe von p wegen der Präcession u. f. an verschiedenen Tagen auch verschiedene Werthe erhalten würden. Es wird daher vortheilhafter seyn, die einzelnen Beobachtungen eines jeden Tages für sich zu reduciren, und die Resultate dieser Reductionen zur Bestimmung von ψ sowohl, als auch von andern Elementen der Rechnung zu benützen. Nehmen wir z. B. an, dass nebst der gesuchten Äquatorhöhe ψ auch noch die der Rechnung zu Grunde gelegte Poldistanz p sowohl als die mittlere Refraction r einer kleinen Verbesserung bedürfen. Sey der wahre Werth der Poldistanz gleich p + dp, und der der wahren Refraction r + dr. Nimmt man bloss auf den vorzüglichsten Coefficienten der Refraction Rücksicht,

so ist (S. 110) $r = A.M.\text{tg}\,z$, wo M der von dem Barometer und Thermometer abhängige Factor, oder wo

$$M = \frac{b}{B\,(1+m\,t)^n}\ \text{(S. 109)},$$

und nahe $A = 58''$ ist. Nehmen wir diesen Coefficienten A der mittleren Refraction um die Grösse dA zu klein an, so ist die wahre Refraction gleich $(A + dA)\,M.\text{tang}\,z$, und daher die Correction der den Rechnungen zu Grunde gelegten mittleren Refraction $dA.M\,\text{tang}\,z$.

Sind daher wieder ζ und ζ' die mit umgewendetem Kreise beobachteten Zenithdistanzen in der oberen, und ζ'', ζ''' in der unteren Culmination, und setzt man der Kürze wegen

$$N = \frac{\zeta + \zeta'}{2} + r + p, \text{ und}$$

$$N' = \frac{\zeta'' + \zeta'''}{2} + r' - p',$$

wo r und p die den Rechnungen zu Grunde gelegte Refraction und Poldistanz in der oberen, und r', p' in der unteren Culmination sind, so hat man

$$\psi = N + dp + M\,\text{tg}\,z\,.dA, \text{ und}$$
$$\psi = N' - dp + M'\,\text{tg}\,z'.dA,$$

also auch, wenn man beyde Werthe von ψ einander gleich setzt,

$$0 = N - N' + 2dp + (M\,\text{tg}\,z - M'\,\text{tg}\,z').dA,$$

und dieses ist eine der Bedingungsgleichungen, welche man für jede doppelte Beobachtung der oberen und unteren Culmination findet, und aus denen man dann durch das bekannte Verfahren die gesuchten Correctionen dp und dA der mittleren Poldistanz und der mittleren Refraction, so wie die wahre Äquatorhöhe ψ ableiten wird.

Um dieses durch ein Beyspiel deutlich zu machen, wollen wir folgende Beobachtungen des Polarsternes in Wien wählen:

1828	Kreis	Beobachtete Zenithdistanz	Mittel	Refraction	Scheinbare Poldistanz	ψ
Obere Culmination						
Dec. 5	Ost	40° 11′ 11.″3	40° 10′ 37.″1	51.″7	1° 35′ 55.″0	41° 47′ 23.″8 = A
	West	10 2.9				
7	Ost	40 11 10.6	40 10 36.3	53.1	54.5	23.9
	West	10 2.0				
10	Ost	40 11 12.45	40 10 38.2	51.8	53.7	23.7
	West	10 3 95				
Untere Culmination						
Dec. 5	Ost	43 22 57.6	43 22 23.4	58.0	1 35 54.8	41 47 26.6 = A′
	West	21 49.2				
7	Ost	43 22 57.02	43 22 22.7	58.7	54.6	26.8
	West	21 48.38				
10	Ost	43 22 56.7	43 22 22.5	58.5	54.1	26.9
	West	21 48.3				

Die geringe Übereinstimmung der aus den oberen und aus den unteren Culminationen gefundenen Äquatorhöhen zeigt, dass p oder A unrichtig angenommen wurde. Da aber die Zenithdistanzen des Polarsternes in seinen beyden Culminationen nur wenig verschieden sind, so ist der Factor $(M \operatorname{tg} z - M' \operatorname{tg} z')$ des letzten Gliedes unserer Bedingungsgleichungen sehr klein, und dieser Stern daher zur Bestimmung von dA nicht geschickt, da man zu dieser Absicht einen anderen Stern wählen müsste, der in seiner oberen Culmination nahe durch das Zenith und in seiner unteren nahe durch den Horizont geht.

Unsere Bedingungsgleichung ist daher

$$0 = N - N' + 2\,dp,$$

das heisst, wenn man die Differenzen der 1.4, der 2.5 und der 3.6 Beobachtung nimmt,

$$0 = -2.8 + 2\,dp$$
$$0 = -2.9 + 2\,dp$$
$$0 = -3.2 + 2\,dp.$$

Im Mittel aus allen drey Beobachtungspaaren

$$0 = -2.966 + 2\,dp,$$

oder $dp = +1.''48$.

Die angenommene mittlere Poldistanz des Sternes muss daher um 1.''48 vergrössert werden, und dann sind die Werthe der

		Äquatorhöhe ψ	Collimationsf.
aus der Beobachtung	I.	41° 47′ 25.''28	34.'' 20
	II.	25.38	34.30
	III.	25.18	34.25
	IV.	25.12	34.20
	V.	25.32	34.32
	VI.	25.42	34.20
	Mittel	41° 47′ 25.''28	34.''24

5. §. Das Vorhergehende setzt voraus, dass man die beyden Beobachtungen mit verkehrtem Instrumente zur Zeit derselben Culmination, also in demselben Augenblicke gemacht habe. Zwar ändern die Sterne, besonders die dem Pole nahen, zur Zeit der Culmination ihre Zenithdistanz nur äusserst wenig, aber dem ungeachtet wird es wünschens-

werth seyn, den Fehler a des Instrumentes auch unabhängig von dieser Gleichzeitigkeit der Beobachtungen zu erhalten.

Zu diesem Zwecke wird man die Zenithdistanzen eines dem Pole nahen Sternes unmittelbar auf einander in beyden Lagen des Kreises beobachten. Ist dann d t die gegebene halbe Zwischenzeit dieser zwey Beobachtungen, und d z die gesuchte Änderung der Zenithdistanz in dieser Zeit d t, und endlich

$$m = \frac{\text{Sin } p \text{ Sin } \psi}{\text{Sin } z} \cdot \text{Sin } t,$$

wo ψ die Äquatorhöhe und t der Stundenwinkel des Sternes ist, so hat man (S. 49)

$$dz = 900\, m \,.\, dt + \tfrac{1}{2}(900)^2 (m \text{ Cotg } t - m^2 \text{ Cotg } z) \text{ Sin } 1.'' \, dt^2,$$

wo d t in Zeitminuten, und d z in Raumsecunden ausgedrückt ist. Dieser Werth von d z an die beyden beobachteten Zenithdistanzen mit verkehrten Zeichen angebracht, gibt zwey gleichzeitige Zenithdistanzen, deren halbe Differenz daher der gesuchte Collimationsfehler ist. Steht der Stern nahe am Pol, so wird man, wenn anders die Zwischenzeit d t nicht zu gross ist, das zweyte in dt^2 multiplicirte Glied der Reduction d z immer weglassen können.

Ex. Den 22. August 1821 wurden in Wien folgende Zenithdistanzen des Polarsternes beobachtet.

	Sternzeit.			Beobacht. Zenithdistanz.		
Kreis Ost:	18^h	$57'$	$11.''2$	$40°$	$0'$	$39.''0$
		58	1.3	40	0	17.0
		58	48.5	39	59	54.5
Kreis West:	19	1	23.9	43	34	23.0
		2	31.1	43	33	52.0
		3	20.3	43	33	30.0

Die Änderung der Zenithdistanz in einer Zeitminute ist nach dem Vorhergehenden

$$dZ = 900 \frac{\text{Sin } p \text{ Sin } \psi}{\text{Sin } z} \cdot \text{Sin } t,$$

Es war aber $p = 1° \; 38'$, und wenn wir alle Beobachtungen auf das Mittel $T = 19^h \; 0' \; 12.''7$ aller sechs Beobachtungszeiten reduciren, so ist

T =	19^h	$0'$	$12.''7$
scheinbare Rectascension	0	57	38.5
Stundenwinkel t =	18^h	$2'$	$34.''2$

also auch $dZ = -25.''6$.

Die Differenz der ersten Beobachtungszeit von T ist

$0^h\ 3'\ 1.''5 = 3.'025$, und

$3.025\, dZ = -77.''4$,

und diese letzte Grösse von der ersten beobachteten Zenithdistanz abgezogen, gibt

$39°\ 59'\ 21.''6$

für die Zenithdistanz, welche man zur Zeit T beobachtet haben würde. Behandelt man eben so alle sechs Beobachtungen, so erhält man

die Zenithdistanz für die Zeit T

Kreis Ost:	39°	59′	21.″6	
			20.9	Mittel: 39° 59′ 20.″37 = z
			18.6	
Kreis West:	43°	34′	53.″4	
			51.1	Mittel: 43° 34′ 51.″50 = z′.
			50.0	

Die halbe Summe dieser Mittel gibt die wahre Zenithdistanz für die Zeit T der Mitte

$$\frac{z'+z}{2} = 41°\ 47'\ 5.''935,$$

und ihre halbe Differenz gibt den gesuchten Collimationsfehler des Instrumentes

$$\frac{z'-z}{2} = 1°\ 47'\ 45.''565,$$

welcher letzte zu allen östlichen Zenithdistanzen addirt, und von allen westlichen subtrahirt werden muss, um die wahre Zenithdistanz zu erhalten.

Ist man von der Übereinstimmung der einzelnen Resultate, das heisst, von der Güte des Instrumentes oder der Beobachtungen schon sonst überzeugt, so kann man kürzer nur die Mittel der östlichen und westlichen Zenithdistanzen vergleichen. So geben die angeführten Beobachtungen im Mittel

	Sternzeit.			Zenithdistanz.		
Kreis Ost:	18^h	58′	0.″3	40°	0′	16.″8
Kreis West:	19	2	25.1	43	33	55.0
Mittel T =	19	0	12.7.			

Die Differenz jeder dieser zwey Beobachtungszeiten von dem Mittel T ist

$$2'\ 12.''4 = 2'.207 \text{, und wie zuvor}$$
$$dZ = -25.''6 \text{, also auch}$$
$$2.207\, dZ = -56.''5 \text{,}$$

und daher

$$\begin{array}{rl} & 40^\circ\ 0'\ 16.''8 \\ & \quad -56.5 \\ \hline z = & 39^\circ\ 59'\ 20.''3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 43^\circ\ 33'\ 55.''0 \\ & \quad +56.5 \\ \hline z' = & 43^\circ\ 34'\ 51.''5 \end{array}$$

also wieder

$$\frac{z'+z}{2} = 41^\circ\ 47'\ 5''9 \text{, und}$$
$$\frac{z'-z}{2} = 1^\circ\ 47'\ 45.''6 \text{ wie zuvor.}$$

I. Da die Zenithdistanz z von t abhängt, wie die Gleichung $\cos z = \sin\psi \sin p \cos t + \cos\psi \cos p$ zeigt, so wird man für den Polarstern eine kleine Tafel entwerfen können, welche die Änderung dZ der Zenithdistanz für eine Zeitminute mit dem blossen Argumente t gibt, in welcher Tafel zugleich auf die kleine Änderung von p für mehrere Jahre Rücksicht genommen werden kann.

II. Ist man von der Beständigkeit dieses Collimationsfehlers durch längere Zeit versichert, so kann man mehrere Sterne, auch auf beyden Seiten des Zeniths, durch einige Tage, und dann in den folgenden Tagen wieder dieselben Sterne mit umgewendetem Instrumente im Meridian beobachten, wo dann die halbe Differenz der Mittel beyder Beobachtungsarten desselben Sternes immer einen mittleren Werth des Collimationsfehlers für die Periode dieser Beobachtungen gibt.

III. Wie man in II. den Collimationsfehler des Instrumentes in Beziehung auf das Zenith, oder wie man den wahren Zenithpunct des Instrumentes durch Beobachtungen derselben Culminationen eines Sternes, aber mit umgewendetem Instrumente, gefunden hat, so kann man auch, ohne das Instrument umzukehren, durch Beobachtungen der Zenithdistanzen desselben Circumpolarsternes in seiner oberen und unteren Culmination, den wahren Polpunct des Instrumentes bestimmen. Bringt man dann die-

sen Collimationsfehler des Instrumentes in Beziehung auf den Pol an die beobachteten oberen und unteren Culminationen mit verkehrten Zeichen an, so erhält man sofort die wahren Poldistanzen der beobachteten Gestirne. Dass man in II. und III. die beobachteten Zenithdistanzen zuerst von der Refraction befreyen muss, ist für sich klar, so wie, dass man die wahre Polhöhe durch das Verfahren in II., aber nicht durch das in III. erhalten kann.

6. §. Um die mittägige Zenithdistanz, und also auch die daraus folgende Polhöhe mit grösserer Schärfe zu erhalten, beobachtet man das Gestirn mehr als einmal nahe vor und nach der Zeit seiner Culmination. Da aber diese Beobachtungen nur in der Nähe des Meridians, nicht in dem Meridian selbst gemacht werden können, so müssen sie vorerst alle auf den Meridian, oder auf die eigentlich mittägige Zenithdistanz reducirt werden.

Man könnte diese Reduction dz einer in der Nähe der Culmination beobachteten Zenithdistanz auf die mittägige Zenithdistanz unmittelbar durch die Seite 49 gegebene Entwicklung finden. Setzt man nämlich a.a.O. den Stundenwinkel $t = 0$, so ist auch $m = 0$ und

$$n = \frac{\text{Sin}\, p\, \text{Sin}\, \psi}{\text{Sin}\, z},$$

und daher die gesuchte Reduction

$$dz = -n.\frac{dt^2}{1.2} + n(1 + 3n\, \text{Cotg}\, z).\frac{dt^4}{1.2.3.4}$$
$$-n[1 + 15n(n + \text{Cotg}\, z + 3n\, \text{Cotg}^2 z)].\frac{dt^6}{1.2.3.4.5.6} + .$$

Um aber diese Reduction noch auf einem anderen Wege zu erhalten, sey überhaupt

$$\frac{\text{Sin}\, a - \text{Sin}\, b}{\text{Cos}\, a} = \omega,$$

so ist auch

$$\omega = \frac{\text{Sin}\, a + \text{Sin}\,(a-b)\, \text{Cos}\, a - \text{Cos}\,(a-b)\, \text{Sin}\, a}{\text{Cos}\, a}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für Sin (a — b), und Cos (a — b) ihre Werthe durch die Potenzen von (a — b), so erhält man

$$\omega = (a-b) + \frac{(a-b)^2 \operatorname{tg} a}{1.2} - \frac{(a-b)^3}{1.2.3} - \frac{(a-b)^4 \operatorname{tg} a}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{(a-b)^5}{1.2.3.4.5} + \frac{(a-b)^6 \operatorname{tg} a}{1.2.3.4.5.6} - ,$$

und wenn man diese Reihe umkehrt,

$$a-b = \omega - \frac{\omega^2}{1.2}\operatorname{tg} a + \frac{\omega^3}{1.2.3}(1+3\operatorname{tg}^2 a) - \frac{\omega^4}{1.2.3.4}(9\operatorname{tg} a + 15\operatorname{tg}^3 a)$$
$$+ \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5}(105\operatorname{tg}^4 a + 90\operatorname{tg}^2 a + 9)$$
$$- \frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6}(945\operatorname{tg}^5 a + 1050\operatorname{tg}^3 a + 225\operatorname{tg} a) + .$$

Es ist aber überhaupt

$$\operatorname{Cos} z = \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} \psi + \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} t.$$

Ist nun z' und p' die Zenith- und Poldistanz des Sternes im Mittag, und $z' - z = dz$, also auch $z = p' - \psi - dz$, so wird die vorhergehende Gleichung

$$\operatorname{Cos}(p' - \psi - dz) = \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} \psi + \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} t,$$

oder auch

$$\operatorname{Cos}(p' - \psi - dz) = \operatorname{Cos}(p - \psi) - 2 \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2},$$

oder endlich $\dfrac{\operatorname{Cos}(p-\psi) - \operatorname{Cos}(p'-\psi-dz)}{\operatorname{Sin}(p-\psi)} = 2\dfrac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{Sin}(p-\psi)}.$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden

$$\frac{\operatorname{Sin} a - \operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos} a} = \omega,$$

so erhält man

$$a = 90^\circ - (p - \psi),\ b = 90^\circ - (p' - \psi - dz), \text{ und}$$

$$\omega = 2 n \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2}, \text{ wenn}$$

$$n = \frac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Sin}(p-\psi)} \text{ ist.}$$

Substituirt man diese Werthe in der oben entwickelten Reihe für $a - b$, so hat man

$$dz = p' - p - \frac{2 n \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{Sin} 1''} + \frac{2 n^2}{\operatorname{Sin} 1''} \operatorname{Cotg}(p-\psi) \operatorname{Sin}^4 \frac{t}{2}$$
$$- \frac{4 n^3}{\operatorname{Sin} 1''}\left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{Cotg}^2(p-\psi)\right).\operatorname{Sin}^6 \frac{t}{2} + ,$$

und diess ist die gesuchte Reduction dz. Substituirt man in ihr für $\text{Sin}^2 \frac{t}{2}$ seinen Werth

$$\frac{dt^2}{4} - \frac{dt^4}{48} + \frac{dt^6}{1440} -$$

so erhält man die zuerst für dz gegebene Reihe wieder.

Dieser Ausdruck von dz gilt unmittelbar für Culminationen auf der Südseite des Zeniths. Auf der Nordseite wird man für obere Culminationen die Grösse z negativ, und für untere Culminationen z sowohl als p negativ setzen.

Lässt man aber die Grössen z und p immer positiv seyn, so hat man für Culminationen auf der Südseite des Zeniths

$$n = \frac{\text{Sin}\, p\ \text{Sin}\, \psi}{\text{Sin}\,(p - \psi)},$$

$$dz = p' - p - \frac{2n}{\text{Sin}\, 1''} \text{Sin}^2 \frac{t}{2} + \frac{2n^2}{\text{Sin}\, 1''} \text{Cotg}\,(p - \psi) . \text{Sin}^4 \frac{t}{2},$$

für obere Culminationen

$$n = \frac{\text{Sin}\, p\ \text{Sin}\, \psi}{\text{Sin}(\psi - p)},$$

$$dz = -\frac{2n}{\text{Sin}\, 1''} \text{Sin}^2 \frac{t}{2} - \frac{2n^2}{\text{Sin}\, 1''} \text{Cotg}\,(p - \psi)\, \text{Sin}^4 \frac{t}{2},$$

und für untere Culminationen

$$n = \frac{\text{Sin}\, p\ \text{Sin}\, \psi}{\text{Sin}\,(p + \psi)},$$

$$dz = + \frac{2n}{\text{Sin}\, 1''} \text{Sin}^2 \frac{t}{2} + \frac{2n^2}{\text{Sin}\, 1''} \text{Cotg}\,(p + \psi) . \text{Sin}^4 \frac{t}{2}.$$

Sind die Beobachtungen sehr nahe an dem Meridian angestellt worden, so wird man in den meisten Fällen das zweyte, von $\text{Sin}^4 \frac{t}{2}$ abhängige Glied dieser Reduction weglassen können. Den Werth von $\dfrac{2\, \text{Sin}^2 \frac{t}{2}}{\text{Sin}\, 1''}$ aber findet man in der Tafel X.

I. Um die Brauchbarkeit dieser Methode, und die Grenzen derselben in der Anwendung kennen zu lernen, wollen wir bloss die Fehler des ersten, als des beträchtlichsten Gliedes der vorhergehenden Reihe suchen, die aus

irgend einem Fehler in den drey Grössen t, p und ψ entstehen. Setzt man also

$$dz = -2 \frac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{Sin}(p-\psi) \operatorname{Sin} 1''},$$

so erhält man für einen fehlerhaften Stundenwinkel

$$d^2 z = dz . dt . \operatorname{Cotg} \frac{t}{2},$$

für eine fehlerhafte Poldistanz

$$d^2 z = \frac{dz^2 . dp \operatorname{Sin} 1''}{2 \operatorname{Sin}^2 p \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2}},$$

und für eine fehlerhafte vorausgesetzte Polhöhe

$$d^2 z = \frac{dz^2 . d\psi \operatorname{Sin} 1''}{2 \operatorname{Sin}^2 \psi \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2}}.$$

Man sieht daraus, dass man vorzüglich für eine gute Zeitbestimmung Sorge tragen muss, da Cotg $\frac{t}{2}$ sehr gross ist. Um Fehler der Zeitbestimmung unschädlich zu machen, wird man zu beyden Seiten des Meridians in nahe gleichen Entfernungen von demselben gleich viel Beobachtungen nehmen, weil die Grösse Cotg $\frac{t}{2}$ nach der Culmination ihr Zeichen ändert. Solche Gestirne endlich, für welche p nahe gleich ψ ist, müssen ganz vermieden werden, weil für sie der allen vorhergehenden Ausdrücken von $d^2 z$ gemeinschaftliche Factor dz zu gross wird, aus welcher Ursache auch überhaupt alle zu grossen Stundenwinkel vermieden werden sollen.

II. Bey Fixsternen fällt das erste Glied p′—p der Reduction weg.

Die Stundenwinkel t jeder einzelnen Beobachtung sind die Differenz der Uhrzeit der Culmination (die also bekannt seyn muss), und der Uhrzeit der Beobachtung. Diess setzt voraus, dass die Uhr zwischen zwey nächsten Culminationen des Gestirnes genau vier und zwanzig Stunden gebe. Ist a die tägliche Acceleration der Uhr in Secunden gegen die Zeit des Gestirnes (für Retardationen ist a negativ), so muss

der vorhergehende Werth von dz noch durch $1 - 0.0000231a$ multiplicirt werden. Denn es war $dz = 2n \,\mathrm{Sin}^2 \frac{t}{2}$, oder $dz = \frac{nt^2}{2}$. Ist aber $x = \frac{at}{24 \cdot 60^2}$ die Acceleration der Uhr in der Zwischenzeit t, so sollte die letzte Gleichung eigentlich seyn

$$dz' = \frac{n(t-x)^2}{2} = \frac{nt^2}{2} - ntx = dz - \frac{2x\,dz}{t},$$

oder wenn man den Werth von x substituirt,

$$dz' = dz\left(1 - \frac{2a}{24 \cdot 60^2}\right) = dz(1 - 0.0000231a).$$

Beobachtet man z. B. die Sonne an einer Sternuhr, so ist nahe $a = 236''$, also jener Factor von dz gleich 0.9945. Beobachtet man aber Fixsterne an einer mittleren Uhr, so ist jener Factor gleich 1.0055. Bey kleineren Stundenwinkeln, die man nach dem Vorhergehenden nie ohne Noth überschreiten wird, kann diese Rücksicht übergangen werden, wenn der Gang der Uhr nicht zu unmässig von der Zeit des Gestirnes abweicht.

Ex. Den 11. März 1794 wurden in Göttingen folgende Circum-Meridianhöhen der Sonne genommen. Die Uhrzeit des wahren Mittags aus correspondirenden Sonnenhöhen war $0^h\ 1'\ 19''$. Die Poldistanz der Sonne im wahren Mittage $p' = 93°\ 30'\ 38''$, und die vorläufige Äquatorhöhe $\psi = 38°\ 28'$. Es ist daher

$$\log \frac{\mathrm{Sin}\,p\ \mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Sin}\,(p-\psi)} = 9.87940.$$

Uhrzeit der Beobachtung	Zenithsdistanz des oberen Sonnenrandes vom Collimationsfehler befreyt	Stundenwinkel	$\frac{2\,\mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} 15t}{\mathrm{Sin}\,1''}$
$23^h\ 57'\ 30''$	$54°\ 45'\ 45''$	$-3'\ 49''$	$28.''6$
23 58 32	54 45 32	− 2 47	15.2
0 1 0	54 45 20	+ 0 19	0.2
0 3 25	54 45 27	+ 2 6	8.7
0 4 28	54 45 35	+ 3 9	19.5
0 5 55	54 45 50	+ 4 36	41.5
	$\frac{1}{6}$ Summe $54°\ 45'\ 34.''8$		$\frac{1}{6}$ Summe $18.''95$

Dessen Log. 1.27761
9.87940

log $dz = 1.15701$
$dz = 14.''5$

Wir haben daher

Mittel der beobachteten Zenithdistanzen	54° 45′ 34.″8
Mittel der Reductionen	— 14.3
	54 45 20.5
Dafür Refraction	+ 1 20.5
Halbmesser	+ 16 8.1
Höhenparallaxe	— 6.8
Meridian-Zenithdistanz des Mittelpunctes z′ =	55 2 42.3
Poldistanz im Mittelpuncte p′ =	93 30 38.0
Gesuchte Äquatorhöhe	38 27 55.7
Polhöhe	51 32 4.3

Bey Fixsternen fällt die Rücksicht auf den Halbmesser und die Parallaxe weg. Bey der Sonne aber soll noch auf die Änderung der Poldistanz Rücksicht genommen werden. Ist A das Mittel der Stundenwinkel vor, und B nach dem Mittag in Zeitminuten, und dp die Zunahme der Poldistanz der Sonne während einer Zeitminute (für abnehmende Poldistanzen ist dp negativ), so ist die corrigirte mittlere Zenithdistanz der Sonne

$$= z' + (A - B)\, dp.$$

In unserem Beyspiele ist $dp = -0.''97$, da die Poldistanz abnimmt, und $A = 2.3$, und $B = 3.3$, also auch $(A - B)\, dp = +0.''5$, und daher

z′ =	55°	2′	42.″3
			+ 0.5
	55	2	42.8
p′ =	93	30	38.0
Äquatorhöhe	38	27	55.2

Wenn man sich von der Richtigkeit der einzelnen Beobachtungen überzeugen, und die fehlerhaften ausschliessen will, so wird man die Reduction, nicht wie zuvor an dem Mittel, sondern einzeln an jeder besondern Beobachtung anbringen. So hätte man in diesem Beyspiele

beobachtete Zenithdistanz	Reduction	Meridian-Z. D.
54° 45′ 45	21.″7	54° 45′ 23.″3
32	11.5	20.5
20	0.2	19.8
27	6.6	20.4
35	14.8	20.2
50	31.4	18.6
	Mittel	54 45 20.5

wie zuvor.

7. §. Das vorhergehende Verfahren der Circummeridianhöhen setzt, wie wir gesehen haben, eine genaue Kenntniss der Zeit und eine wenigstens genäherte Kenntniss der Polhöhe des Beobachtungsortes voraus. Man kann sich aber auch von diesen beyden Voraussetzungen frey machen, wozu uns die Ausdrücke des §. 6 selbst Gelegenheit geben werden.

Setzen wir voraus, dass man in der Nähe der nur beynahe bekannten Culminationszeit des Gestirns drey Höhen mit den Uhrzeiten der Beobachtungen genommen habe, und seyen

die beob. Höhen	die Uhrzeiten
H	T
$H+h$	$T+t$
$H+h'$	$T+t'$.

Die unbekannte mittägige Höhe des Gestirns sey $H+x$ und die ebenfalls unbekannte Uhrzeit der Culmination $T+\theta$.

Da nach §. 6 die in der Nähe des Meridians beobachteten Höhen sich wie die Quadrate der Zwischenzeiten ändern, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x &= A\,\theta^2 \\ x-h &= A\,(\theta-t)^2 \\ x-h' &= A\,(\theta-t')^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (I)$$

wo A eine constante Grösse bezeichnet. Drückt man die Höhenänderungen h, h' und x in Bogenminuten, und die Änderungen t, t' und θ des Stundenwinkels in Zeitminuten aus, so hat man für Culminationen auf der Südseite des Zeniths

$$A = \quad 0.032725\,\frac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Sin}(p-\psi)},$$

und für die Nordseite bey oberen Culminationen

$$A = -\,0.032725\,\frac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Sin}(p-\psi)}$$

und bey unteren $A = -\dfrac{0.032725 \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Sin}(p+\psi)}$.

Eliminirt man aus den beyden ersten Gleichungen I die Grösse θ, so erhält man

$$x = \frac{(h+k)^2}{4k} \quad \ldots \quad (II)$$

wo $k = A\,t^2$ ist. Durch diese Gleichung (II) findet man daher

die Grösse x, also auch die mittägige Höhe $H + x$ bloss aus der Differenz h von zwey Circummeridianhöhen und der Differenz t der beyden Uhrzeiten, und zwar ohne alle vorhergehende Zeitbestimmung. Will man sich auch noch von der vorläufigen Kenntniss der Polhöhe (die man zur Berechnung von A oder k brauchte) unabhängig machen, so wird man aus den drey Gleichungen (I) die beyden Grössen θ und A eliminiren, wodurch man erhält

$$x = \frac{(M' t' - M t)^2}{4 t t' (t' - t)(M' - M)} \quad . \; . \; . \; (III)$$

wo $M = t h'$ und $M' = t' h$ ist, und dieser Ausdruck enthält bloss die Differenzen der beobachteten Höhen und der Uhrzeiten. Man wird ihn einfacher machen, wenn man, was immer in der Gewalt des Beobachters steht, zwey der drey Höhen gleich gross annimmt. Sind z. B. die beyden ersten Höhen gleich gross, so ist

$$x = \frac{h' . t^2}{4 t' (t - t')} .$$

Man wird sogleich sehen, dass diese Ausdrücke, besonders für Circumpolarsterne, selbst bey beträchtlichen Stundenwinkeln noch sehr brauchbare Resultate geben, und dass es daher hinreichend ist, die Uhrzeit der Culmination nur beynahe zu kennen; eine Kenntniss, die man sich übrigens leicht durch die Beobachtungen selbst erwerben kann, wenn man mit dem Instrumente das Gestirn so lange verfolgt, bis die Höhenänderungen desselben sehr klein werden. Aus dieser Ursache wird diess Verfahren zu Breitenbestimmungen auf der See sehr anwendbar seyn.

Ex. I. Den 1. August 1803 wurden in Seeberg folgende Höhen des Mittelpunctes der Sonne genommen:

	Beob. Höhen	Uhrzeiten
I.	- - 56° 51′ 59″.9	23h 44′ 3″
II.	- - 57 1 9.6	49 13
III.	- - - - 9 20.6	55 8
IV.	- - - - 14 57.8	24 0 58
V.	- - - - 18 8.8	6 51
VI.	- - - - 17 8.1	18 20
VII.	- - - - 12 13.2	24 57

Daraus wurde, nach der Methode des §. 6 die mittägige,

von Refraction und Parallaxe noch nicht befreyte Höhe der Sonne gleich 57° 18′ 53″. 4 gefunden. (Mon. Corresp. Vol. X. Seite 13.)

Wendet man aber die Gleichung (II) auf je zwey dieser Beobachtungen an, so hat man, wenn die vorläufige Äquatorhöhe $\psi = 39° 3'. 54''$ und die Poldistanz $p = 71° 45'. 30''$ gesetzt wird, $A = 0.036262$, und damit gibt die Beobachtung

II. und VI.	III. und IV.
$t = 29.117$	$t = 5.833$
$h = 15.975$	$h = 5.620$
$k = 30.743$	$k = 1.234$
$x = 17.748$	$x = 9.518$

also mittägige Höhe

$H + x = 57° 18' 54.''5$ - - $H + x = 57° 18' 51.''7$

Wendet man aber auf dieselben Beobachtungen die Gleichung (III) an, so erhält man

	II. IV. VI.	III. IV. V.	I. IV. VII.
$M =$	187.64	51. 30	342. 10
$M' =$	401.86	65. 87	939. 27
$x =$	17.712	9.535	26.859
$H + x =$	57° 18′ 52.″3	57° 18′ 52.″7	57° 18′ 51.″4

Immer noch sehr brauchbare Resultate, besonders für Beobachtungen zur See (da die einzelnen Beobachtungsfehler mit Sextanten oft zehn und mehr Secunden betragen), obschon die Stundenwinkel dieser Beobachtungen bis auf 27 Zeitminuten gehen, und man daher die Uhrzeit des Mittags nur bis auf eine halbe Stunde zu kennen braucht.

Ex. II. An demselben Orte sind den 10. Jänner 1804 folgende Beobachtungen des Polarsterns in der Nähe seiner untern Culmination gemacht worden.

	Beob. Höhen	Uhrzeiten
I.	49° 22′ 38″. 7	11ʰ 11′ 19″
II.	17 49. 1	11 41 44
III.	15 32. 7	12 1 48
IV.	13 10. 6	12 47 13
V.	13 9. 3	12 52 54
VI.	13 26. 0	13 9 4
VII.	15 32. 7	13 42 10
VIII.	17 49. 1	14 2 14
IX.	22 38. 7	14 32 39

Die Poldistanz des Sterns war $p = 1°\,43'\,50''$ und die vorläufige Äquatorhöhe $\psi = 39°\,3'\,54''$ und daher $A = -0.000953$. — Daraus wurde nach der Methode des §. 6 die mittägige Höhe des Polarsterns gleich $49°\,13'\,9''.3$ gefunden.

Die Gleichung (II) aber gibt

III. VII.	III. VI.
$h = 0$	-2.112
$k = 9.601$	-4.313
$x = 2.400$	-2.393

$$H + x = 49°\,13'\,8''.7 \quad - - \quad 49°\,13'\,9''.1.$$

Die Gleichung (III) endlich gibt

II. IV. VIII.	I. IV. IX.
$t = 65.483$	95.900
$t' = 140.500$	201.333
$h = -4.642$	-9.468
$h' = 0$	0
$x = -4.663$	-9.489

$$H + x = 49°\,13'\,9''.4 \quad - - \quad 49°\,13'\,9''.4.$$

also die Abweichungen von der wahren mittägigen Höhe $H + x = 49°\,13'\,9''.3$ sehr klein, obschon die Stundenwinkel bis $1^h\,40'$ und ihre Differenzen bis $3^h\,21'$ gehen. Es ist übrigens klar, dass man, wie die Gleichung (III) zeigt, solche Beobachtungen vermeiden muss, für welche die Zwischenzeiten zu klein, oder in welchen die Differenzen der Zeiten sich nahe wie die Differenzen der Höhen verhalten, weil in dem ersten Falle nahe $t' - t = 0$ und in dem zweyten $M' = M$ ist.

8. §. Ein dem vorhergehenden ähnliches Verfahren kann man endlich auch anwenden, um durch blosse beobachtete Differenzen der Azimute und der Höhen, ganz ohne Hülfe einer Uhr, die Polhöhe zu bestimmen. Sind nämlich die wieder in der Nähe der Culmination an dem Instrumente abgelesenen Azimute θ, $\theta + a$ und $\theta + a'$ und die dazu gehörenden Höhen H, $H + h$ und $H + h'$, und sind dieselben Grössen für den Meridian selbst $\theta + \alpha$ und $H + x$, so hat man

$$x = A\alpha^2$$
$$x - h = A(\alpha - a)^2$$
$$x - h' = A(\alpha - a')^2$$

wo $A = \frac{\sin\psi \sin(p - \psi)}{2 \sin p} \sin 1''$ für die Südseite des Zeniths, und für die Nordseite bey oberer Culmination

$$A = -\frac{\sin\psi \sin(p - \psi)}{2 \sin p} \sin 1''$$

und bey unterer Culmination

$$A = -\frac{\sin\psi \sin(p + \psi)}{2 \sin p} \sin 1'' \text{ ist.}$$

Hat man also z. B. nur zwey Beobachtungen, so findet man die Grösse x, von welcher die Polhöhe unmittelbar abhängt, durch die Gleichung

$$x = \frac{(h + k)^2}{4k}, \text{ wo } k = A a^2 \text{ ist.}$$

Hat man aber drey Beobachtungen, so ist

$$x = \frac{(M' a' - M a)^2}{4 a a' (a' - a)(M' - M)},$$

wo $M = a h'$ und $M' = a' h$ ist. Durch den letzten Ausdruck findet man die Polhöhe bloss durch die Differenzen der an dem Instrumente gelesenen Azimute und Höhen, ohne diese Azimute und Höhen selbst, ohne die Lage des Meridians und ohne die Zeit des Mittags zu kennen.

9. §. Es wurde oben (§. 1) gezeigt, dass die Polhöhe am sichersten aus Beobachtungen nahe an dem Meridian abgeleitet wird. Allein wenn die Poldistanz des Gestirns sehr klein ist, so ist es nahe gleichgültig, in welchem Puncte des Parallelkreises man den Stern zu dieser Absicht nehmen will. Diess zeigt der in §. 1 angeführte Ausdruck für $d\varphi$, den man, für kleine p, auch so darstellen kann

$$d\varphi = dt \sin t \operatorname{tg} p - dp \cos t - dz \frac{\sin z}{\cos\varphi \cos p},$$

woraus folgt, dass ein Fehler in der beobachteten Zenithdistanz nahe denselben Fehler in der Polhöhe hervorbringt, wie im Meridian (weil z nahe $= 90 - \varphi$ und Cos p nahe gleich der Einheit ist), und dass ferner ein Fehler in p durch grössere Stundenwinkel sogar verkleinert wird. Was endlich den Fehler d t der Zeit betrifft, so wird, wie der letzte Ausdruck zeigt, wenn d t eine ganze Zeitsecunde beträgt, und $p = 1°40'$ ist, für die

Stundenwinkel 0^h 2^h 4^h 6^h

der Fehler $d\varphi$ seyn $0''.0$ $0''.2$ $0''.4$ $0''.5$,

also $d\varphi$ noch immer kleiner, als die nur zu gewöhnlichen Beobachtungsfehler selbst an unsern vorzüglichen Instrumenten. Auch wird man den von einer nicht ganz genauen Zeitbestimmung entspringenden Fehler $d\varphi$ vermeiden können, wenn man auf der andern Seite des Meridians in gleicher Entfernung von ihm eine zweyte Beobachtung nimmt, für welche Sin t dieselbe Grösse aber mit entgegengesetzten Zeichen ist. Daraus folgt also, dass man die dem Pole nahen Sterne in jedem Puncte ihres Parallelkreises mit nahe gleicher Sicherheit zur Breitenbestimmung anwenden kann.

Sey also z die beobachtete, von dem Collimationsfehler und der Refraction befreyte Zenithdistanz eines solchen Sterns, dessen scheinbare Poldistanz p und Stundenwinkel t ist, so findet man die Äquatorhöhe ψ aus den Gleichungen

$$\tang \alpha = \tang p \cos t,$$

$$\cos(\psi - \alpha) = \frac{\cos \alpha \cos z}{\cos p}.$$

Um die Berechnung dieser Ausdrücke durch Logarithmen mit sieben Decimalstellen zu vermeiden, kann man ψ in eine Reihe entwickeln, die nach den Potenzen der kleinen Grösse p fortgeht. Zu diesem Zwecke sey $x = \psi - z$, so ist

$$\cos z - \cos p \cos(z + x) - \sin p \sin(z + x) \cos t = 0.$$

Löst man in dieser Gleichung $\sin(z+x)$ und $\cos(z+x)$ auf, und setzt

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \text{ und } \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

so erhält man

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 a \operatorname{tg} \frac{x}{2} = b,$$

folglich $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$

$$= -a + a\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{b}{a^2} - \tfrac{1}{8}\frac{b^2}{a^4} + \tfrac{1}{16}\frac{b^3}{a^6} - \ldots\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{b}{a} - \tfrac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{a} + \tfrac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{1}{a^2} - \ldots,$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$a = \frac{\text{Cos}\,p\,\text{Sin}\,z - \text{Sin}\,p\,\text{Cos}\,z\,\text{Cos}\,t}{\text{Cos}\,z + \text{Cos}\,p\,\text{Cos}\,z + \text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,z\,\text{Cos}\,t},$$

$$\text{und } b = \frac{\text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,z\,\text{Cos}\,t - \text{Cos}\,z + \text{Cos}\,p\,\text{Cos}\,z}{\text{Cos}\,z + \text{Cos}\,p\,\text{Cos}\,z + \text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,z\,\text{Cos}\,t}.$$

$$\text{Demnach ist } \tfrac{1}{2}\frac{b}{a} = \frac{\text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,z\,\text{Cos}\,t - \text{Cos}\,z + \text{Cos}\,p\,\text{Cos}\,z}{2\,(\text{Cos}\,p\,\text{Sin}\,z - \text{Sin}\,p\,\text{Cos}\,z\,\text{Cos}\,t)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\,p\,\text{Cos}\,t + \tfrac{1}{4}\,\text{Sin}^2 p\,\text{Cotg}\,z\,(1 - 2\,\text{Sin}^2 t)$$

$$+ \tfrac{1}{4}\,\text{Sin}^3 p\,\text{Cos}\,t\,[\text{Cosec}^2 z - 2\,\text{Cotg}^2 z\,\text{Sin}^2 t],$$

wenn man die vierte und die höhern Potenzen von p vernachlässigt; ferner

$$-\tfrac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{a} = -\tfrac{1}{8}[\text{Sin}^2 p\,\text{Cos}^2 t + \text{Sin}^3 p\,\text{Cos}\,t\,\text{Cotg}\,z\,(1 - 2\,\text{Sin}^2 t)\ldots]$$

$$\times [2\,\text{Cotg}\,z + \text{Sin}\,p\,\text{Cos}\,t\,(1 + 2\,\text{Cotg}^2 z)\ldots]$$

$$= -\tfrac{1}{4}\,\text{Sin}^2 p\,\text{Cotg}\,z\,\text{Cos}^2 t$$

$$- \tfrac{1}{8}\,\text{Sin}^3 p\,[\text{Cos}^3 t + 2\,\text{Cotg}^2 z\,\text{Cos}\,t\,(2 - 3\,\text{Sin}^2 t)];$$

$$\text{und } + \tfrac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{1}{a^2} = + \tfrac{1}{4}\,\text{Sin}^3 p\,\text{Cos}^3 t\,\text{Cotg}^2 z.$$

Addirt man diese Ausdrücke, so erhält man

$$\text{tg}\,\frac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\,p\,\text{Cos}\,t - \tfrac{1}{4}\,\text{Sin}^2 p\,\text{Sin}^2 t\,\text{Cotg}\,z,$$

$$+ \tfrac{1}{8}\,\text{Sin}^3 p\,\text{Cos}\,t\,(1 + \text{Sin}^2 t),$$

und daraus durch eine einfache Verwandlung

$$x = p\,\text{Cos}\,t - \tfrac{1}{2}\,p^2\,\text{Sin}^2 t\,\text{Cotg}\,z\,\text{Sin}\,1''$$

$$+ \tfrac{1}{3}\,p^3\,\text{Sin}^2 t\,\text{Cos}\,t\,.\,\text{Sin}^2 1'' \ldots . \text{(A)}$$

Entwirft man sich also eine kleine Tafel, welche mit dem Argumente t die beyden Grössen

$$M = \tfrac{1}{2}\,p^2\,\text{Sin}^2 t\,\text{Sin}\,1'' \text{ und}$$

$$N = \tfrac{1}{3}\,p^3\,\text{Sin}^2 t\,\text{Cos}\,t\,\text{Sin}^2 1''$$

gibt, so erhält man sofort die gesuchte Grösse ψ durch den Ausdruck

$$\psi = z + p\,\text{Cos}\,t - M\,\text{Cotg}\,z + N.$$

Die Werthe von M und N gibt die Tafel XIII.

I. Für einen fixen Beobachtungsort lässt sich auch die Gleichung (A) von der beobachteten Zenithdistanz z ganz unabhängig machen. Es ist nämlich

$$\text{Cotg}\, z = \text{Cotg}\,(\psi - x) = \frac{\text{Cotg}\,\psi + \text{tg}\, x}{1 - \text{Cotg}\,\psi\, \text{tg}\, x}$$

$$\text{nahe} = \text{Cotg}\,\psi + \frac{x}{\text{Sin}^2\,\psi};$$

da Cotg z durch p^2 multiplicirt wird, so kann man die folgenden Glieder der Entwicklung von Cotg z weglassen, wenn man wieder die vierten Potenzen von x oder p vernachlässigt. Es ist daher auch

$$\text{Cotg}\, z = \text{Cotg}\,\psi + \frac{p\, \text{Cos}\, t}{\text{Sin}^2\,\psi};$$

und wenn man diesen Werth von Cotg z in (A) substituirt, so erhält man

$$\begin{aligned} x = p\, \text{Cos}\, t &- \tfrac{1}{2} p^2\, \text{Sin}^2\, t\, \text{Cotg}\,\psi\, \text{Sin}\, 1'' \\ &+ \tfrac{1}{3} p^3\, \text{Sin}^2\, t\, \text{Cos}\, t\, \text{Sin}^2\, 1'' \\ &- \tfrac{1}{2} p^3\, \frac{\text{Sin}^2\, t\, \text{Cos}\, t\, .\, \text{Sin}^2\, 1''}{\text{Sin}^2\,\psi} \quad \ldots (B) \end{aligned}$$

Hat man also eine Tafel, welche für jeden Werth von t die Summe S der drey letzten Glieder dieser Gleichung gibt, so ist

$$\psi = z + x \text{ oder}$$
$$\psi = z + p\, \text{Cos}\, t + S.$$

II. Wenn man mehrere auf einander folgende Zenithdistanzen beobachtet, so wird man das Mittel derselben als die Zenithdistanz ansehen können, welche zur Zeit der Mitte aller Beobachtungszeiten Statt hatte, vorausgesetzt, dass die einzelnen Beobachtungen nicht in zu grossen Intervallen auf einander folgen, und dass man daher die Änderungen der Zenithdistanzen den Änderungen der Zeit proportional annehmen kann, eine Voraussetzung, die meistens in der Macht des Beobachters stehen wird.

Will man aber auch weiter entfernte Beobachtungen verbinden, oder hat man diese Beobachtungen mit einem Multiplicationskreise gemacht, so kann man so verfahren.

Seyen $z, z', z'' \ldots$ die beobachteten Zenithdistanzen und $t, t', t'' \ldots$ ihre Stundenwinkel und N die Anzahl der Beobachtungen. Die arithmetischen Mittel dieser Grössen seyen

$$Z = \frac{z + z' + z'' + }{N} \text{ und } T = \frac{t + t' + t'' + }{N},$$

und endlich $\mathfrak{z}$ diejenige Zenithdistanz, welche zu dem Mittel T der Stundenwinkel oder zu der Mitte der sämmtlichen Beobachtungszeiten gehört.

Ist dann $m = \frac{\text{Sin p Sin } \psi}{\text{Sin Z}} \cdot \text{Sin T}$ und $n = m \text{ Cotg T}$,

so hat man (S. 49) für die erste Beobachtung

$$\mathfrak{z} = z + m(T - t) + (n - m^2 \text{ Cotg z}) \frac{(T-t)^2}{2} \text{Sin } 1'',$$

oder wenn man $T - t = \theta$ setzt,

$$\mathfrak{z} = z + m\theta + (n - m^2 \text{ Cotg z}) \cdot \frac{\theta^2}{2} \text{Sin } 1'',$$

und eben so

$$\mathfrak{z} = z' + m\theta' + (n - m^2 \text{ Cotg z}) \cdot \frac{\theta'^2}{2} \text{Sin } 1'',$$

$$\mathfrak{z} = z'' + m\theta'' + (n - m^2 \text{ Cotg z}) \cdot \frac{\theta''^2}{2} \text{Sin } 1'' \text{ u. s. w.}$$

wo $\theta = T - t$, $\theta' = T - t'$, $\theta'' = T - t'' \ldots$ oder wo $\theta, \theta', \theta'' \ldots$ die Unterschiede der einzelnen Beobachtungszeiten von dem Mittel aller dieser Zeiten sind.

Addirt man diese Gleichungen, und bemerkt man, dass nach der Bedeutung der Grössen $\theta, \theta', \theta'' \ldots$

$$\theta + \theta' + \theta'' + \ldots = 0 \text{ ist},$$

so erhält man

$$N\mathfrak{z} = z + z' + z'' + \ldots$$
$$+ (n - m^2 \text{ Cotg z}) (\theta^2 + \theta'^2 + \theta''^2 +) \frac{\text{Sin } 1''}{2},$$

oder wenn man der Kürze wegen annimmt

$$(\theta^2 + \theta'^2 + \theta''^2 + \ldots) \frac{\text{Sin } 1''}{2} = \Sigma \frac{\theta^2 \text{ Sin } 1''}{2} = \Sigma \frac{2 \text{ Sin}^2 \frac{\theta}{2}}{\text{Sin } 1''},$$

$$\mathfrak{z} = \frac{z + z' + z'' +}{N} + (n - m^2 \text{ Cotg z}) \cdot \Sigma \frac{2 \text{ Sin}^2 \frac{\theta}{2}}{\text{Sin } 1''},$$

oder endlich, da $\frac{z + z' + z'' +}{N} = Z$ ist,

$$\mathfrak{z} = Z + (n - m^2 \text{ Cotg z}) \cdot \Sigma \frac{2 \text{ Sin}^2 \frac{\theta}{2}}{\text{Sin } 1''}.$$

Kennt man so den Werth von $\mathfrak{z}$ aus der letzten Gleichung, so suche man noch x aus

$x = p \operatorname{Cos} t - \frac{1}{2} p^2 \operatorname{Sin}^2 t \operatorname{Cotg} z \operatorname{Sin} 1'' + \frac{1}{3} p^3 \operatorname{Sin}^2 t \operatorname{Cos} t . \operatorname{Sin}^2 1''$,
und man hat

$$\psi = z + x, \text{ wie zuvor.}$$

Allein in den meisten Fällen wird man, wie bereits oben erinnert wurde, $z = Z$ setzen können, weil die Grösse

$$(n - m^2 \operatorname{Cotg} z) . \Sigma \frac{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\theta}{2}}{\operatorname{Sin} 1''}$$

für dem Pole nahe Sterne sehr klein ist, wenn man nicht die Beobachtungszeiten zu unmässig ausdehnt.

Ex. Den 22. August 1821 wurde in Wien die von dem Collimationsfehler befreyte Zenithdistanz des Polarsterns $z = 41° 47' 5''.9$ um $19^h\ 0'\ 12''.7$ Sternzeit beobachtet. Die scheinbare Rectascension des Sterns war $0^h 57' 10''.0$ und die scheinbare Poldistanz $p = 1° 37' 40''$.

Es ist daher Stundenwinkel t = Sternzeit — Rectascension $= 18^h 3' 2''.7$ oder $t = 270° 45' 40''.5$. Mit dem genäherten Werthe $\psi = 41° 47' 30''$ findet man

$$\begin{aligned} S = & \tfrac{1}{2} p^2 \operatorname{Sin}^2 t \operatorname{Cotg} \psi \operatorname{Sin} 1'' \\ & - \tfrac{1}{3} p^3 \operatorname{Sin}^2 t \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin}^2 1'' \\ & + \tfrac{1}{2} p^3 \frac{\operatorname{Sin}^2 t \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin}^2 1''}{\operatorname{Sin}^2 \psi}, \end{aligned}$$

oder $S = 93''.01$.

Wir haben daher $\psi = z + \text{Refr.} + p \operatorname{Cos} t - S$,

und es ist z	=	41° 47′ 5″.90
Refr.	+	34.30
p Cos t	+	1 17.98
S	—	1 33.01
ψ	=	41° 47′ 25″.17
gesuchte Polhöhe		48 12 34 .83.

10. §. Die Polhöhe kann auch auf eine sehr einfache Art durch zwey Sterne gefunden werden, von welchen man jeden zu beyden Seiten des Meridians in gleichen, übrigens unbekannten Zenithdistanzen beobachtet. Seyen t und t′ die Uhrzeiten der vor- und nachmittägigen Beobachtung des ersten Sterns, dessen Poldistanz p ist, und dieselben Grössen für den zweyten Stern τ, τ' und p′. Ist ferner T die Zeit

der Uhr zwischen zwey nächsten Culminationen der Fixsterne, so sind

$$s = (t' - t) \frac{180}{T} \text{ und } s' = (\tau' - \tau) \frac{180}{T}$$

die Stundenwinkel der zwey beobachteten Sterne, und wenn z die ihnen gemeinschaftliche, unbekannte Zenithdistanz dieser Sterne bezeichnet, so hat man

$$\text{Cos}\, z = \text{Cos}\, \psi\, \text{Cos}\, p + \text{Sin}\, \psi\, \text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, s \text{ und}$$
$$\text{Cos}\, z = \text{Cos}\, \psi\, \text{Cos}\, p' + \text{Sin}\, \psi\, \text{Sin}\, p'\, \text{Cos}\, s'.$$

Die Differenz dieser beyden Gleichungen gibt

$$\text{tg}\, \psi = \frac{\text{Cos}\, p' - \text{Cos}\, p}{\text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, s - \text{Sin}\, p'\, \text{Cos}\, s'}.$$

Man sieht, dass diese Bestimmung der Polhöhe unabhängig ist von der Kenntniss der Refraction und des Collimationsfehlers, dass aber die Poldistanzen der Sterne genau bekannt, und überdiess sehr von einander verschieden seyn müssen, damit geringe Fehler in s oder p keinen nachtheiligen Einfluss auf den gesuchten Werth von ψ äussern.

11. §. Noch muss hier der Breitenbestimmung mittelst des Mittagsrohres erwähnt werden. Vorausgesetzt, dass die Drehungsaxe dieses Instrumentes horizontal und dass die optische Axe des Rohres auf dieser Drehungsaxe senkrecht ist, stelle man das Instrument so, dass die Drehungsaxe nahe in der Ebene des Meridians liege, und dass daher das Fernrohr einen Vertikalkreis beschreibe, der nahe durch den Ost- und Westpunct des Horizonts geht, also auch die Parallelkreise aller Sterne, die zwischen dem Äquator und dem Zenithe culminiren, zweymal durchschneide. (M. s. Astr. Nachr. Vol. III. und VI.)

Seyen T und T′ die Uhrzeiten der Durchgänge eines Sterns durch den senkrechten Faden des Rohres und τ, τ' ihre Correctionen zur Sternzeit, alle diese Grössen in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückt. Ist dann a und p die scheinbare Rectascension und Poldistanz des Sterns, so sind die beyden Stundenwinkel desselben (die östlichen negativ genommen) $t = T + \tau - a$ und $t' = T' + \tau' - a$. Dieses vorausgesetzt, hat man für die beyden Beobachtungen ge-

meinschaftliche Cotangente des Azimuts den doppelten Ausdruck

$$\frac{\operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} t} = \frac{\operatorname{Cos} t' \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} t'},$$

woraus sofort folgt

$$\operatorname{tg} \varphi (\operatorname{Cotg} t - \operatorname{Cotg} t') = \frac{\operatorname{Cotg} p}{\operatorname{Sin} t} - \frac{\operatorname{Cotg} p}{\operatorname{Sin} t'},$$

oder $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\operatorname{Cotg} p (\operatorname{Sin} t' - \operatorname{Sin} t)}{\operatorname{Sin} (t' - t)}$

$$= \frac{\operatorname{Cotg} p \operatorname{Cos} \frac{t' + t}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{t' - t}{2}}, \text{ oder auch}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Cotg} p \operatorname{Cos} \frac{1}{2} (T' + \tau' + T + \tau - 2a)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (T' + \tau' - T - \tau)} \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

und diese Gleichung gibt die gesuchte Polhöhe.

Um zu sehen, welchen Einfluss die Fehler von a, p, τ und τ' auf die Bestimmung von φ haben, differentiire man die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Cotg} p \operatorname{Cos} \frac{t' + t}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{t' - t}{2}}; \text{ so erhält man}$$

$$d\varphi = - dp \frac{\operatorname{Cos}^2 \varphi}{\operatorname{Sin}^2 p} \cdot \frac{\operatorname{Cos} \frac{t' + t}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{t' - t}{2}}$$

$$- \tfrac{1}{2} d.(t' + t) \operatorname{Cos}^2 \varphi \operatorname{Cotg} p \frac{\operatorname{Sin} \frac{t' + t}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{t' - t}{2}}$$

$$+ \tfrac{1}{2} d.(t' - t) \operatorname{Cos}^2 \varphi \frac{\operatorname{Cotg} p \operatorname{Cos} \frac{t' + t}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{t' - t}{2}} \operatorname{tg} \frac{t' - t}{2}$$

$$= - dp \frac{\operatorname{Cos}^2 \varphi}{\operatorname{Sin}^2 p} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{Cotg} p} - \tfrac{1}{2} d.(t' + t) \operatorname{Cos}^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \frac{t' + t}{2}$$

$$+ \tfrac{1}{2} d.(t' - t) \operatorname{Cos}^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \frac{t' - t}{2}.$$

Es ist aber $d.(t'+t) = d\tau' + d\tau - 2\,da$,

und $d.(t'-t) = d\tau' - d\tau$;

demnach ist der Factor von $da = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{tg}\,\frac{t'+t}{2}$,

der von $dp = -\frac{\mathrm{Sin}\,2\varphi}{\mathrm{Sin}\,2p}$,

der von $d\tau = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,2\varphi\left(\mathrm{tg}\,\frac{t'+t}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{t'-t}{2}\right)$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{Sin}\,t'}{\mathrm{Cos}\,\frac{t'+t}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{t'-t}{2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{Sin}\,t'}{\mathrm{Cos}\,t' + \mathrm{Cos}\,t};$$

endlich der von $d\tau' = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,2\varphi\left(\mathrm{tg}\,\frac{t'+t}{2} - \mathrm{tg}\,\frac{t'-t}{2}\right)$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{Sin}\,t}{\mathrm{Cos}\,t' + \mathrm{Cos}\,t}.$$

Nimmt man alles diess zusammen, so ist

$$d\varphi = \frac{1}{2}\,da\,\mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{tg}\,\frac{t'+t}{2} - dp.\frac{\mathrm{Sin}\,2\varphi}{\mathrm{Sin}\,2p}$$

$$-\frac{1}{2}\,d\tau.\frac{\mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{Sin}\,t'}{\mathrm{Cos}\,t' + \mathrm{Cos}\,t} - \frac{1}{2}\,d\tau'.\frac{\mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{Sin}\,t}{\mathrm{Cos}\,t' + \mathrm{Cos}\,t}\quad\ldots\text{(B)}$$

Setzt man voraus, dass das Instrument etwa bis auf eine Minute genau sich von Ost nach West bewegt, so kann $\mathrm{Cos}\,\frac{t'+t}{2} = 1$ gesetzt werden, und dann gehen die beyden Gleichungen (A) und (B) in folgende einfachere über:

$\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{Cotg}\,p.\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}(T' + \tau' - T - \tau)$ und

$$d\varphi = \frac{1}{2}(d\tau' - d\tau)\,\mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(T' + \tau' - T - \tau) - dp.\frac{\mathrm{Sin}\,2\varphi}{\mathrm{Sin}\,2p}.$$

Daraus folgt, dass ein Fehler in dem Unterschiede der Correctionen der Uhrzeit einen desto geringeren Einfluss hat, je kleiner $T' - T$ ist, d. h. wenn der Stern nahe bey dem Zenith culminirt, für welchen Fall die Methode allein angewendet werden soll. Da für Zenithalsterne $\varphi = 90 - p$ ist, so ist auch $\mathrm{Sin}\,2\varphi = \mathrm{Sin}\,2p$ und daher $d\varphi = -dp$ oder der Fehler der Polhöhe wird genau eben so gross, als der

Fehler der zu Grunde gelegten Poldistanz des Sterns. Braucht man daher diese Methode nur, um die Differenz zweyer Breiten (etwa an den beyden Endpuncten einer geodätischen Messung) durch denselben Stern zu finden, so erhält man φ ganz unabhängig von dem Werthe, den man der Grösse p beygelegt hat. Man bemerkt von selbst, dass dieses Verfahren auch dann noch ein richtiges Resultat gibt, wenn auch die optische Axe auf der Drehungsaxe nicht genau senkrecht steht, wenn die beyden Endcylinder der Axe ungleiche Durchmesser haben, oder wenn das Fernrohr oder die Axe einer kleinen Biegung ausgesetzt ist, nur muss dann an den folgenden Tagen die Beobachtung mit umgekehrter Axe wiederholt, und aus beyden Beobachtungen das Mittel der Grösse φ genommen werden.

I. Beobachtet man zwey verschiedene Sterne, den einen östlich und den andern westlich vom Meridian, so wird man in dem zweyten Theile der ersten der vorhergehenden Gleichungen p′ statt p setzen, wodurch man erhält

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\text{Cotg}\,p\,\text{Sin}\,t' - \text{Cotg}\,p'\,\text{Sin}\,t}{\text{Sin}\,(t'-t)} \text{ oder}$$

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\text{Cotg}\,p\,\text{Sin}\,(T'+\tau'-a') - \text{Cotg}\,p'\,\text{Sin}\,(T+\tau-a)}{\text{Sin}\,((T'+\tau'-a')-(T+\tau-a))}$$

Wenn man also mit dem nahe senkrecht auf den Meridian gestellten Mittagsrohre einen Stern auf der einen Seite des Meridians beobachtet hat, kann man sogleich einen zweyten auf der andern Seite durchgehen lassen. Die Sternzeit T und die Zenithdistanz z dieser Sterne, die man zur Stellung des Rohres braucht, findet man aus den Gleichungen
$\text{Cos}\,(T-a) = \text{Cotg}\,\varphi\,\text{Cotg}\,p$ und $\text{Cos}\,(T'-a') = \text{Cotg}\,\varphi\,\text{Cotg}\,p'$

$$\text{Cos}\,z = \frac{\text{Cos}\,p}{\text{Sin}\,\varphi}, \qquad \text{Cos}\,z' = \frac{\text{Cos}\,p'}{\text{Sin}\,\varphi}.$$

II. Wird dieses Fernrohr mit einem kleinen Höhenkreise zur Einstellung der Sterne, und sein Stativ mit einer um einen vertikalen Zapfen beweglichen, und etwa in Zehntel-Grade eingetheilten horizontalen Platte, welche die beyden Stützen des Fernrohrs trägt, versehen, so kann man damit nach §. 8 zuerst die Zeit oder die Correction der Uhr bestimmen, wo das Fernrohr nahe in die Ebene des Meridians ge-

bracht wird. Dreht man dann das Fernrohr im Horizont nahe um 90°, so wird man damit, nach dem in (I) gezeigten Verfahren, auch die Polhöhe bestimmen, wo man, der grösseren Sicherheit wegen, zwey Sternenpaare mit umgewendeter Rotationsaxe des Fernrohrs beobachten kann. Ist das Fernrohr stark genug, etwa von 18 Zoll Focallänge, so wird man damit auch Vergleichungen des Mondes mit benachbarten Sternen im Meridian und selbst Finsternisse beobachten, oder die geographische Länge des Beobachtungsortes bestimmen können, daher ein solches kleines Mittagsfernrohr sich vorzüglich für astronomische Reisen eignet.

Vorlesung III.

Bestimmung der Zeit und der Polhöhe zugleich.

1. §. Auf Reisen oder auf der See, wo man den Stand der Uhr oft nicht mit Genauigkeit kennt, und auch, ihn zu bestimmen, nicht immer Zeit und Gelegenheit hat, wird eine Methode wünschenswerth, Zeit und Breite zugleich zu bestimmen. Die Auflösung dieser Aufgabe ist schwer, wenn sie zugleich die für die Schiffer nöthige Einfachheit und Kürze haben soll.

Ist P der Pol des Äquators und Z das Zenith, und ist ein bekannter Stern in A und einige Zeit darauf ein anderer in B beobachtet worden, so soll man aus den beyden Zenithdistanzen $ZA = z$, $ZB = z'$ und der gegebenen Zwischenzeit der beyden Beobachtungen die Äquatorhöhe $PZ = \psi$ und den Stundenwinkel $ZPA = t$ des ersten Sterns zur Zeit der ersten Beobachtung finden.

Ist α p die gegebene scheinbare Rectascension und Poldistanz des ersten, und α' p' des zweyten Sterns, und T, T' die gesuchte Sternzeit der beyden Beobachtungen, so sind die Stundenwinkel der Sterne $T - \alpha = t$ und $T' - \alpha' = t'$, und beyder Differenz $t - t' = (\alpha' - \alpha) - (T' - T)$ ist eine bekannte Grösse, da $\alpha' - \alpha$ bekannt und auch $T' - T$, oder die Sternzeit der Zwischenzeit beyder Beobachtungen gegeben ist. Sey also diese bekannte Grösse

$$(\alpha' - \alpha) - (T' - T) = \theta,$$

so ist $t - t' = \theta$ oder $t' = t - \theta$.

Man kennt also in dem Dreyecke APB zwey Seiten $PA = p$, $PB = p'$ mit dem eingeschlossenen Winkel $APB = \theta$, und kann daher daraus die dritte Seite AB und den Winkel PAB finden. In dem Dreyecke ZAB sind dann alle drey

Seiten bekannt, also wird auch der Winkel Z A B und daher auch $ZAP = ZAB - PAB$ gefunden. Endlich sind in dem Dreyecke P Z A die beyden Seiten $PA = p$ und $ZA = z$ und der eingeschlossene Winkel Z A P bekannt, also kann auch daraus der Winkel $APZ = t$ und die Seite $PZ = \psi$ gefunden werden.

Allein diese Auflösung dreyer sphärischer Dreyecke ist für die Ausübung beschwerlich. Wir wollen daher sehen, wie sich diese Betrachtungen durch die Analyse vereinfachen lassen. (Berl. Jahrb. 1812.)

Es ist, wenn z und z′ die beyden beobachteten Zenithdistanzen sind,

$$\operatorname{Cos} z = \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} \psi + \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} t \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\operatorname{Cos} z' = \operatorname{Cos} p' \operatorname{Cos} \psi + \operatorname{Sin} p' \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} (t - \theta) \quad . \quad (2)$$

Aber es ist auch

$$(\operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} \psi + \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} t)^2$$
$$+ (\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} \psi - \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} t)^2$$
$$= \operatorname{Cos}^2 \psi + \operatorname{Sin}^2 \psi \operatorname{Cos}^2 t,$$

und daher wird die Gleichung (1)

$$(\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} \psi - \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} t)^2 + \operatorname{Sin}^2 \psi \operatorname{Sin}^2 t - \operatorname{Sin}^2 z = 0.$$

Ist also $\operatorname{Cos} c = \dfrac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} \psi - \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} t}{\operatorname{Sin} z}$, so ist

$$\operatorname{Sin} t \operatorname{Sin} \psi = \operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} c,$$

und wenn man in der vorletzten Gleichung den Werth

$$\frac{\operatorname{Cos} z - \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} \psi}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} t}$$

für $\operatorname{Sin} \psi$ aus (1) substituirt, oder auch, wenn man in derselben Gleichung den Werth

$$\frac{\operatorname{Cos} z - \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} t}{\operatorname{Cos} p}$$

für $\operatorname{Cos} \psi$ substituirt, so erhält man

$$\operatorname{Cos} \psi = \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} z + \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} c \text{ oder}$$

$$\operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} \psi = \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} z - \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} c.$$

Die Gleichung (2) gibt ferner

$$\operatorname{Cos} z' = \operatorname{Cos} p' \operatorname{Cos} \psi + \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Sin} p' \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} t$$
$$+ \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} p' \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Sin} t$$

und, wenn man in dieser Gleichung die vorhergehenden Werthe von $\operatorname{Cos} \psi$, $\operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} \psi$ und $\operatorname{Sin} t \operatorname{Sin} \psi$ substituirt, und

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} p'}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p' - \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} p' \operatorname{Cos} \theta} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

setzt, so erhält man

$$\operatorname{Cos} z' - \operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} p' - \operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} p' \\ = \operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} p' (\operatorname{Cos} c \operatorname{Cotg} a + \operatorname{Sin} c).$$

Setzt man daher $a - c = b$, so ist

$$\operatorname{Cos} b = \frac{\operatorname{Sin} a (\operatorname{Cos} z' - \operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} p' - \operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} p')}{\operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} p'} \quad (4)$$

Hat man aber so die Werthe von a und b gefunden, so kennt man auch $c = a - b$, und sonach t durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} z - \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} c} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

woraus $T = \alpha + t$ oder die Sternzeit der ersten Beobachtung folgt, die, mit der Uhrzeit dieser Beobachtung verglichen, den gesuchten Stand der Uhr gibt. Die Äquatorhöhe ψ endlich findet man durch die Gleichung

$$\operatorname{Cotg} \psi = \frac{\operatorname{Sin} t}{\operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} c} (\operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} z + \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} c) \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die Gleichungen (3) bis (6) enthalten die Auflösung unserer Aufgabe. Man kann sie durch Einführung dreyer Hülfsmittel A, B, C etwas bequemer machen.

Es sey $\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{Cotg} p'}{\operatorname{Cos} \theta}$,

$$\operatorname{tg} a = -\frac{\operatorname{Cos} A \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{Cos} (A + p)},$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} z'}{\operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} p' \operatorname{Sin} (A + p)},$$

$$\operatorname{Cos} b = \frac{\operatorname{Cos} a \operatorname{Cotg} z \operatorname{Sin} (45^\circ - C) . \sqrt{2}}{\operatorname{Cos} C \operatorname{Cotg} (A + p)},$$

$$\operatorname{Cotg} B = \frac{\operatorname{Cotg} z}{\operatorname{Cos} (a - b)},$$

so hat man

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{Sin} B \operatorname{tg} (a - b)}{\operatorname{Sin} (p - B)},$$

$$\operatorname{Cotg} \psi = \operatorname{Cos} t . \operatorname{Cotang} (p - B).$$

Ex. 1809 den 17. May wurde in Göttingen beobachtet:

	Uhrzeit	Zenithdistanz	
α Bootis	16ʰ 8′ 25″	39° 55′ 0″	im Westen vom Meridian
α Aquilae	16 37 49	56 25 0	im Osten vom Meridian

	39° 55′ 0″	56° 25′ 0″
Collfr.	+ 32.5	+ 32.5
Refr.	+ 48.8	+ 1 27.5
	z = 39° 56′ 21″.3	z′ = 56° 27′ 0″.0

Für die scheinbaren Orte beyder Sterne hat man

$$\alpha = 211^\circ 44' 54''.88 \qquad p = 69^\circ 49' \; 3''.98$$
$$\alpha' = 295 \; 22 \; 17.50 \qquad p' = 81 \; 37 \; 24.55$$

$$T' - T = 0^h 29' 24'' = 7^\circ 21' 0''$$
$$\theta = 76^\circ 16' 22''.62.$$

Wir haben daher

$$A = 31^\circ 49' 14''.13$$
$$a = 86 \; 40 \; 51.11$$
$$b = 56 \;\; 2 \; 46.29$$
$$B = 35 \; 46 \; 13.27$$
$$t = 31 \; 43 \; 42.45$$
$$T = t + \alpha = 16^h \; 13' \; 54.49$$
$$\text{Uhrzeit } 16 \;\; 8 \;\; 25$$

$$\text{Corr. der Uhr } x = + \;\; 5' 29''.49$$

$$\text{und eben so } T' = \alpha' - \alpha - \theta + T = 16^h 43' 18''.49$$
$$16 \; 37 \; 49$$

$$x = + \;\; 5' \; 29''.49$$

$$\text{und endlich } \phi = 38^\circ 27' 54''.47$$

2. §. Die numerische Entwicklung der vorhergehenden Ausdrücke wird aber, besonders für den ungeübten Schiffer, wenn er sie, wie es erfordert wird, oft vornehmen soll, noch immer beschwerlich seyn.

Sehen wir daher, ob man nicht durch eine indirecte Auflösung des Problems unserem Zwecke näher kommen könne.

Behält man die vorige Bezeichnung bey, und setzt die schon beynahe bekannte Äquatorhöhe gleich x, so findet man die beyden Stundenwinkel t und t' aus

$$\left.\begin{aligned}\text{Cos}\tfrac{1}{2}t &= \sqrt{\frac{\text{Sin}\,\frac{p+x+z}{2}\ \text{Sin}\,\frac{p+x-z}{2}}{\text{Sin}\,p\ \text{Sin}\,x}}\\ \text{Cos}\tfrac{1}{2}t' &= \sqrt{\frac{\text{Sin}\,\frac{p'+x+z'}{2}\ \text{Sin}\,\frac{p'+x-z'}{2}}{\text{Sin}\,p'\ \text{Sin}\,x}}\end{aligned}\right\}.$$

War x gut gewählt, so ist

$$T = \alpha + t = \alpha + t' + \theta \text{ und}$$
$$T' = \alpha' + t' = \alpha' + t - \theta,$$

wo, wie zuvor, $\theta = (\alpha' - \alpha) - (T' - T)$ eine bekannte Grösse ist.

Ist aber x fehlerhaft, so werden auch diese beyden für T und T' gegebenen Ausdrücke nicht gleich seyn. Man suche dann, nur in Minuten, die Azimute ω, ω' aus den Gleichungen

$$\text{Sin}\,\omega = \frac{\text{Sin}\,p\ \text{Sin}\,t}{\text{Sin}\,z}, \qquad \text{Sin}\,\omega' = \frac{\text{Sin}\,p'\ \text{Sin}\,t'}{\text{Sin}\,z'} \text{ und}$$

$$A = \frac{\text{Cotg}\,\omega}{\text{Sin}\,x}, \qquad A' = \frac{\text{Cotg}\,\omega'}{\text{Sin}\,x}.$$

Ist dann dx der gesuchte Fehler in dem oben angenommenen Werthe von x, so ist

$$dt = A\,dx \text{ und } dt' = A'\,dx$$

und daher die verbesserten Werthe von T und T'

$$T = \alpha + t + A\,dx = \alpha + t' + \theta + A'\,dx \text{ und}$$
$$T' = \alpha' + t' + A'\,dx = \alpha' + t - \theta + A\,dx,$$

und aus beyden folgt

$$dx = \frac{t' - t + \theta}{A - A'},$$

also auch die wahre Äquatorhöhe $\psi = x + dx$.

Ex. Für das vorhergehende Beyspiel hat man, wenn man $x = 38^\circ\,28'\,10''$ setzt,

$$t = 31^\circ\,44'\,3''34 \text{ und } t' = -44^\circ\,32'\,57''.02;$$
$$\text{aber } \omega = 50^\circ\,15'.9 \qquad \omega' = -56^\circ\,23'.09$$
$$A = 1.3362 \qquad A' = -1.0686$$

$$\text{also } dx = -\frac{37 \cdot 74}{2 \cdot 4048} = -15''.693,$$

wahre Äquatorhöhe $\psi = x + dx = 38^\circ\,27'\,54''.3$, wie zuvor.

Weiter ist

$$T = 243^\circ\,28'\,37''.25 = 16^h\,13'\,54''.48$$

Uhrzeit $16\quad 8\ 25.\ 0$

Corr. der Uhr gegen Sternzeit $+\quad 5\ 29.48$

oder $T' = 250^\circ\,49'\,37''.25 = 16^h\,43'\,18''.48$

Uhrzeit $16\ 37\ 49.\ 0$

Corr. der Uhr $+\quad 5\ 29.48$ wie zuvor.

Hätte man anfangs die hypothetische Äquatorhöhe $x = 38^\circ\,18'\,0''$ also gegen 10 Minuten zu klein angenommen, so hätte man gefunden

$$t = 31^\circ\,30'\,20'' \qquad t' = -44^\circ\,22'\ 0''$$
$$\omega = 49\ 49\ 18 \qquad \omega' = -56\ \ 6\ 23$$
$$A = 1.36245 \qquad A' = -1.08395$$

$$dx = \frac{t' - t + \theta}{A - A'} = \frac{1442.62}{2.44640} = 589.''7 = 0^\circ\,9'\,49''.7,$$

also wahre Äquatorhöhe $\psi = x + dx = 38^\circ\,27'\,49''.7$ nur mehr $5''$ zu klein.

$$T = \alpha + t + A\,dx = 243^\circ\,28'\,38''.3 = 16^h\,13'\,54''.5$$

Uhrzeit $16\quad 8\ 25.0$

Corr. der Uhr $+\quad 5\ 29.5$ wie zuvor.

Sollte aber, bey einem anfangs zu fehlerhaft angenommenen Werthe zon x, der gefundene Werth von ψ von jenem x zu verschieden seyn, so würde man die Rechnung mit diesem neuen verbesserten Werthe von x wiederholen.

3. §. Setzt man die Poldistanzen p und p' einander gleich, oder beobachtet man denselben Stern zweymal, so hat man, wenn man die beyden Gleichungen

$$\cos z = \cos p \cos\psi + \sin p \sin\psi \cos t$$
$$\cos z' = \cos p \cos\psi + \sin p \sin\psi \cos t'$$

subtrahirt, folgenden Ausdruck

$$\sin\tfrac{1}{2}(t' + t)\,\sin\tfrac{1}{2}(t' - t) = \frac{\sin\frac{1}{2}(z' + z)\,\sin\frac{1}{2}(z' - z)}{\sin p\,\sin\psi} \quad . \ . \ . \ (\mathrm{I})$$

Liegen die beyden Zenithdistanzen auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten des Meridians, so ist im ersten Falle $\frac{1}{2}(t' - t)$ und im zweyten $\frac{1}{2}(t' + t)$, nämlich die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen, bekannt, also wird man auch in beyden Fällen aus der Gleichung (I) die Grösse t sowohl als t' finden, wenn ψ bekannt ist.

Hat man aber für ψ nur einen genäherten Werth angenommen, so werden auch die Werthe von t und t′ nicht der Wahrheit gemäss seyn; allein die erste der beyden vorhergehenden Gleichungen gibt

$$\text{Cos}\,(p-\psi) = \text{Cos}\,z + 2\,\text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,\psi\,\text{Sin}^2\frac{t}{2},$$

und daraus folgt, dass, wenn die erste Zenithdistanz z nahe an dem Meridian genommen wurde, also t nur klein ist, der Fehler von ψ das letzte Glied dieser Gleichung nur unmerklich ändern wird, und dass man daher, des oben erwähnten unrichtigen Werthes von ψ und t ungeachtet, doch die wahre Äquatorhöhe ψ' nahe genug aus der Gleichung finden wird

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos}\,(p-\psi') = \text{Cos}\,z + 2\,\text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,\psi\,\text{Sin}^2\frac{t}{2} \\ \text{oder auch aus} \\ \text{Cos}\,(p-\psi') = \text{Cos}\,z' + 2\,\text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,\psi\,\text{Sin}^2\frac{t'}{2} \end{array}\right\}\ldots\text{(II)}$$

wenn die zweyte Zenithdistanz z′ nahe an dem Meridian genommen worden ist. Kennt man aber so den wahren Werth von ψ', so wird man ihn statt ψ in der Gleichung (I) substituiren, und dadurch auch die Zeitbestimmung, oder die Werthe von t und t′ verbessern.

Ex. Uhrzeit	Z. D. Mittelp. der Sonne
$0^h\,5'\,12''$	$z = 27°\,38'\,10''.2$
3 21 30	$z' = 48\;36\;40\;.5$

Beyde Beobachtungen wurden auf der Westseite des Meridians und die erste nahe an demselben gemacht. Die scheinbare Poldistanz ist $p = 69°\,24'\,32''$ und die angenommene Äquatorhöhe $\psi = 41°\,50'$.

Es ist also $\frac{t'-t}{2} = 1^h\,38'\,9'' = 24°\,32'\,15''$

$$\log\frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(z'+z)\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(z'-z)}{\text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(t'-t)} = 9.4609838$$

$$\log\text{Sin}\,\psi = 9.8241037$$

$$\log\text{Sin}\,\frac{t'+t}{2} = 9.6368801$$

$$\text{also } \frac{t'+t}{2} = 25^\circ\, 40'\, 58''.7$$

$$\text{es war } \frac{t'-t}{2} = 24\ 32\ 15.0$$

$$\text{also } t = 1\ \ 8\ 43.7$$

Damit gibt die Gleichung (II)

$$2 \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2} = 0.0001248$$

$$\operatorname{Cos} z = 0.8859110$$

$$\operatorname{Cos}(p - \psi') = 0.8860358$$

$$p - \psi' = 27^\circ\, 37'\, 14''.6$$

$$p = 69\ 24\ 32.0$$

$$\text{verbesserte Äquatorhöhe } \psi' = 41\ 47\ 17.4$$

Geht man mit diesem Werthe von ψ' wieder zur Gleichung (I) zurück, so ist

$$\text{wie zuvor, } 9.4609838$$

$$\log \operatorname{Sin} \psi' = 9.8237210$$

$$\operatorname{Sin} \frac{t'+t}{2} = 9.6372628$$

$$\frac{t'+t}{2} = 25^\circ\, 42'\, 26''.1$$

$$\frac{t'-t}{2} = 24\ 32\ 15.0$$

also auch	$t = 1^\circ\, 10'\, 11''.1$		$t' = 50^\circ\, 14'\, 41''.1$
	$0\ \ 4'\, 40''.74$		$3\ 20'\, 58''.74$
Uhrzeit	$0\ \ 5\ 12$	Uhrzeit	$3\ 21\ 30$
Corr. der Uhr	-31.26		-31.26

Sollte der neue Werth ψ' der Äquatorhöhe von dem früher angenommenen ψ zu sehr verschieden seyn, so wird man die Rechnung mit dem verbesserten Werthe von ψ' wiederholen. Die zwey vorhergehenden Zenithdistanzen wurden unter der Voraussetzung von

$$\psi = 41^\circ\, 47'\, 20'' \text{ und } t = 1^\circ\, 10'\, 10'',$$

$$t' = 50^\circ\, 14'\, 40'' \text{ und } p = 69^\circ\, 24'\, 32''$$

nach der Formel berechnet

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{Cos} t . \operatorname{tg} \psi, \qquad \operatorname{Cos} z = \frac{\operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos}(p - x)}{\operatorname{Cos} x},$$

so dass also die oben gefundene Äquatorhöhe

$$\psi' = 41^\circ 47' 17''.4$$

um 2''.6 zu klein ist.

Dieses zuerst von Douwes vorgeschlagene Verfahren ist das einfachste, welches man bisher für den Gebrauch zur See gefunden hat. Wenn man aber bey der Sonne, die sich vorzüglich zu Breitenbestimmungen zur See eignet, bey weit entfernten Beobachtungen (die, wie die Gleichung (I) zeigt, gewählt werden müssen) die Poldistanzen in beyden Beobachtungen gleich setzt, so kann dadurch die gesuchte Äquatorhöhe ψ oft beträchtlich fehlerhaft werden. Es scheint daher das Seite 202 gegebene Verfahren, aus zwey oder drey in der Nähe des Meridians genommenen Zenithdistanzen, unabhängig beynahe von allen andern Vorkenntnissen, die Breite zu bestimmen, für Seefahrer vorzüglich empfehlungswerth zu seyn. Wie man aber, wenn die Breite bekannt ist, die Zeit selbst durch eine einzelne Zenithdistanz in der Nähe des ersten Vertikalkreises finden kann, ist aus dem Vorhergehenden Seite 170 bekannt.

Übrigens würde es nicht schwer seyn, auch auf die erwähnte Änderung der Poldistanz der Sonne Rücksicht zu nehmen.

Multiplicirt man nämlich von den beyden anfänglichen Gleichungen des §. 3, nachdem man in der zweyten p' statt p gesetzt hat, die erste durch Sin p' und die zweyte durch Sin p, so gibt ihre Differenz

$$\text{Cos}\, z\, \text{Sin}\, p' - \text{Cos}\, z'\, \text{Sin}\, p = \text{Cos}\, \psi\, \text{Sin}\, (p' - p) + \text{Sin}\, p\, \text{Sin}\, p'\, \text{Sin}\, \psi\, (\text{Cos}\, t - \text{Cos}\, t').$$

Setzt man in dem ersten Gliede dieser Gleichung

$$\text{Cos}\, z\, \text{Sin}\, p' = \text{Cos}\, z\, \text{Sin}\, (p + p' - p) = \text{Cos}\, z\, \text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, (p' - p) + \text{Cos}\, z\, \text{Cos}\, p\, \text{Sin}\, (p' - p, \quad \text{und } \text{Cos}\, (p' - p) = 1,$$

so hat man

$$\text{Sin}\, \frac{t' + t}{2}\, \text{Sin}\, \frac{t' - t}{2} = \frac{\text{Sin}\, \frac{z' + z}{2}\, \text{Sin}\, \frac{z' - z}{2}}{\text{Sin}\, p'\, \text{Sin}\, \psi} + \frac{\text{Sin}\, (p' - p)\, [\text{Cos}\, p\, \text{Cos}\, z - \text{Cos}\, \psi]}{2\, \text{Sin}\, p\, \text{Sin}\, p'\, \text{Sin}\, \psi},$$

welche Gleichung man statt der vorhergehenden (I) brauchen wird.

4. §. Wir wollen nun noch sehen, wie man aus drey beobachteten gleichen Zenithdistanzen dreyer verschiedener Sterne die beyden Grössen ψ und t finden kann.

Sind $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ die scheinbaren Rectascensionen, und p p' p'' die Poldistanzen dieser Sterne, und $\theta\,\theta'\,\theta''$ die Uhrzeiten der Beobachtungen, so hat man, wenn k die Correction (Acceleration) der Uhr gegen Sternzeit ist, für die Stundenwinkel der Sterne die Ausdrücke

$$\theta - k - \alpha,\ \theta' - k - \alpha',\ \theta'' - k - \alpha'',$$

also auch, wenn man der Kürze wegen

$\theta - \alpha = \tau$, $\theta' - \alpha' = \tau'$, und $\theta'' - \alpha'' = \tau''$ setzt,

$$\mathrm{Cos}\, z = \mathrm{Cos}\, p\ \mathrm{Cos}\,\psi + \mathrm{Sin}\, p\ \mathrm{Sin}\,\psi\, \mathrm{Cos}\,(\tau - k),$$
$$\mathrm{Cos}\, z = \mathrm{Cos}\, p'\ \mathrm{Cos}\,\psi + \mathrm{Sin}\, p'\ \mathrm{Sin}\,\psi\, \mathrm{Cos}\,(\tau' - k),$$
$$\mathrm{Cos}\, z = \mathrm{Cos}\, p''\ \mathrm{Cos}\,\psi + \mathrm{Sin}\, p''\ \mathrm{Sin}\,\psi\, \mathrm{Cos}\,(\tau'' - k).$$

Die Differenz der beyden ersten dieser Gleichungen gibt

$$\mathrm{Cotg}\,\psi = \mathrm{Cos}\,\frac{\tau' - \tau}{2}\ \mathrm{Cotg}\,\frac{p + p'}{2}\ \mathrm{Cos}\left(\frac{\tau' + \tau}{2} - k\right)$$
$$+ \mathrm{Sin}\,\frac{\tau' - \tau}{2}\ \mathrm{Cotg}\,\frac{p - p'}{2}\ \mathrm{Sin}\left(\frac{\tau' + \tau}{2} - k\right).$$

Ist daher

$$A\,\mathrm{Sin}\,B = \mathrm{Sin}\,\frac{\tau' - \tau}{2}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{p - p'}{2},$$

$$A\,\mathrm{Cos}\,B = \mathrm{Cos}\,\frac{\tau' - \tau}{2}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{p + p'}{2},\ \text{und}\ C = \frac{\tau' + \tau}{2} - B,$$

so ist die letzte Gleichung

$$\mathrm{Cotg}\,\psi = A\,\mathrm{Cos}\,(C - k) \ldots\ldots (I).$$

Auf dieselbe Art erhält man

$$A'\,\mathrm{Sin}\,B' = \mathrm{Sin}\,\frac{\tau'' - \tau}{2}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{p - p''}{2},$$

$$A'\,\mathrm{Cos}\,B' = \mathrm{Cos}\,\frac{\tau'' - \tau}{2}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{p + p''}{2},$$

$$C' = \frac{\tau'' + \tau}{2} - B',$$

$$\mathrm{Cotg}\,\psi = A'\,\mathrm{Cos}\,(C' - k) \ldots\ldots\ldots (II).$$

Beyde Werthe von Cotg ψ geben

$$o = A\,\mathrm{Cos}\,(C - k) - A'\,\mathrm{Cos}\,(C' - k),\ \text{oder}$$
$$o = [(A' - A) - (A' + A)]\,\mathrm{Cos}\,(C - k)$$
$$+ [(A' - A) + (A' + A)]\,\mathrm{Cos}\,(C' - k),\ \text{oder}$$
$$o = (A' - A)\,[\mathrm{Cos}\,(C - k) + \mathrm{Cos}\,(C' - k)]$$
$$- (A' + A)\,[\mathrm{Cos}\,(C - k) - \mathrm{Cos}\,(C' - k)],$$

oder endlich

$$o = (A' - A) \operatorname{Cos} \left(\frac{C + C'}{2} - k\right) \operatorname{Cos} \frac{C' - C}{2}$$
$$- (A' + A) \operatorname{Sin} \left(\frac{C + C'}{2} - k\right) \operatorname{Sin} \frac{C' - C}{2}.$$

Setzt man also

$$\frac{A}{A'} = \operatorname{tg} x, \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - x) \operatorname{Cotg} \frac{C' - C}{2} = \operatorname{tg} y,$$

so ist $\frac{A' - A}{A' + A} = \operatorname{tg}(45^\circ - x)$, und daher

$$k = \tfrac{1}{2}(C' + C) - y \ldots\ldots. (III).$$

Die Gleichung (I) oder (II) gibt die Äquatorhöhe, und (III) die gesuchte Correction der Uhr.

Berechnet man dann mit diesen Werthen von ψ und k aus einer der drey ersten Gleichungen die wahre Höhe Z so gibt dieser Werth von Z mit der beobachteten Zenithdistanz verglichen den Collimationsfehler oder den Theilungsfehler des Instrumentes, oder die wahre Refraction, als die dritte der zu suchenden unbekannten Grössen. Bey der Auswahl der Sterne hat man vorzüglich darauf zu sehen, dass die Azimute derselben so verschieden als möglich sind. (M. s. Mon. Corr. 1808 October und 1809 Jän.)

Ex. 1808 den 27. August wurde in Göttingen unter der gemeinschaftlichen Zenithdistanz 37° 20′ 32.″5 beobachtet

α Andromedae zur Uhrzeit	21^h	33′	26″
α Urs. min.	21	47	30
α Lyrae	22	5	21

Die scheinbaren Positionen dieser Sterne sind

	Rectascension			Poldistanz		
α Andromedae	23^h	58′	33.″33	61°	57′	45.″2
α Urs. min.	0	55	4.70	1	42	54.3
α Lyrae	18	30	28.96	51	22	53.4

also ist

$$\tau = 21^h\ 34'\ 52.''67 = 323^\circ\ 43'\ 10.''0$$
$$\tau' = 20\ \ 52\ \ 25.30 = 313\ \ 6\ \ 19.5$$
$$\tau'' = 3\ \ 34\ \ 52.04 = 53\ \ 43\ \ 0.6$$

$\log A = 0.2072029 \qquad \log A' = 0.8836657$

$B = 354^\circ\ 19'\ 22.''04 \quad B' = 266^\circ\ 30'\ 55.''07$

$C = -35\ \ 54\ \ 37.27 \quad C' = -77\ \ 47\ \ 49.75$

$x = \ \ 11\ \ 53\ \ 41.28 \quad y = -59\ \ 35\ \ 14.71$

$k = +\ 2^\circ\ 44'\ 1.''20 = 0^h\ 10'\ 56.''08$

(Acceleration der Uhr)

$C - k = -38^\circ\ 38'\ 38.''47$

$C' - k = -80\ \ 31\ \ 50.95$, also

$\psi = 38^\circ\ \ 28'\ \ 8.''49.$

Mit diesen Werthen von ψ und k findet man aus den drey ersten Gleichungen

z =	37°	22′	38.″7
Refraction			42.7
wahre Zenithdistanz	37	21	56.0
beobachtete Zenithdistanz	37	20	32.5
bekannter Collimationsfehler		1	45.0
wahre beobachtete Zenithdistanz	37	22	17.5
also Theilungsfehler			21.5

Vorlesung IV.

Bestimmung der geographischen Länge.

1. §. Wenn man die Ortszeit (wahre, mittlere oder Sternzeit) kennt, welche zwey Orte der Oberfläche der Erde in demselben Augenblicke zählen, so ist die Differenz dieser Ortszeiten auch sofort die Differenz der geographischen Längen dieser Orte. Beobachtet man also an beyden Orten eine solche Erscheinung, die für beyde in demselben Augenblicke Statt hat, z. B. Mondesfinsternisse, Ein- und Austritte der Jupiterssatelliten, Feuersignale u. s. w., und ist die Correction der Uhr oder die Zeitbestimmung an beyden Orten bekannt, so ist dadurch auch die Längendifferenz dieser Orte gegeben.

Die Mondesfinsternisse geben wenig Genauigkeit, da der Schatten der Erde auf dem Monde nur sehr unvollkommen begrenzt erscheint. Etwas genauer sind die Beobachtungen der Ein- und Austritte der Flecken des Mondes in und aus dem Schatten. Auch die Jupiterssatelliten gewähren nicht die gewünschte Übereinstimmung, selbst wenn man nur die beyden dem Jupiter nächsten, als die zu diesem Zwecke tauglichsten, und von ihnen nahe gleich viel Ein- als Austritte, wenn man an beyden Orten mit nahe gleich starken Fernröhren beobachtet, wenn man die der Opposition zu nahen Finsternisse als ungewiss gänzlich ausschliesst u. s. w.

Sehr genau sind die Pulversignale (die durch die plötzliche Entzündung von vier bis sechs Loth gemeines Schiesspulver gegeben werden), aber sie sind ihrer Natur nach nur auf geringe Distanzen (von fünf bis zehn deutsche Meilen), beschränkt. Da die Geschwindigkeit des Lichtes für solche Distanzen als unendlich angesehen werden kann, so wird

man diese Erscheinungen für alle Orte, wo sie sichtbar sind, als tautochron betrachten. Durch Verbindung mehrerer solcher Signale lässt sich diese Art der Längenbestimmung sehr weit fortführen. Dass eine genaue Zeitbestimmung an den beyden Endpuncten dieser Signalkette erfordert wird, ist für sich klar. Man theile eine gerade Linie AG in den Puncten B, C, D, E, F in sechs Theile, wo A und G die beyden Endpuncte der Kette, und B, D, F drey Berge bezeichnen, auf welchen man die Signale geben soll, und wo die Zwischenorte C und E so gelegen sind, dass man in C die Signale von B und D, und eben so in E die Signale von D und F sehen kann. Drücken die Grössen AB, BC, CD... zugleich die noch unbekannten Längendifferenzen a, b, c... der Orte A und B, B und C, C und D... aus, und sind t, t′ und t″ die Ortszeiten, zu welchen die Signale auf den drey Bergen B, D und F gegeben werden, so sieht der erste Ort A das erste Signal in B um die Zeit $t - a = \theta$ seines Ortes; der dritte Ort C aber sieht dasselbe Signal in B um die Zeit $t + b = \theta'$ seines Ortes. Eben so wird das zweyte Signal in D von dem Orte C um $t' - c = \theta''$

E um $t' + d = \theta'''$

und das dritte Signal in F von dem Orte E um $t'' - e = \theta^{IV}$

G um $t'' + f = \theta^{V}$

gesehen.

Es ist aber die gesuchte Längendifferenz der beyden äussersten Puncte

$$L = AB = (a + b) + (c + d) + (e + f),$$

das heisst, wenn man die vorhergehenden Werthe von a, b, c... substituirt,

$$L = (\theta' - \theta) + (\theta''' - \theta'') + (\theta^{V} - \theta^{IV}),$$

oder endlich

$$L = \theta^{V} - (\theta^{IV} - \theta''') - (\theta'' - \theta') - \theta,$$

und dieser Ausdruck zeigt, dass man an den inneren Beobachtungsstationen C und E nur den G a n g, aber nicht den S t a n d der Uhr zu kennen braucht, dass aber an den beyden Endpuncten A und G der Signalkette eine genaue Zeitbestimmung unerlässlich ist. Den blossen G a n g der Uhr während den Signalen aber kann man für die Orte C und E finden, wenn nach der Vollendung der ganzen Unterneh-

mung die Zwischenzeiten der verschiedenen in B und F gegebenen Signale von den beyden Hauptbeobachtern in A und G gegeben werden, so dass also in den Zwischenstationen C und E nur überhaupt ein gleichförmiger Gang der Uhr vorausgesetzt wird. Beyspiele dieser Längenbestimmungen findet man in den ersten Bänden der Annalen der Wiener Sternwarte.

2. §. Die grosse Vollkommenheit, mit welcher jetzt tragbare Uhren (Chronometer) verfertiget werden, setzt uns in den Stand, die Zeit eines Ortes unmittelbar mit der eines anderen zu vergleichen. Ein Beyspiel wird den Gebrauch derselben deutlich machen.

Den 29. May 1786 fand Zach die Correction seines Chronometers gegen die mittlere Zeit in London im Mittag dieses Tages gleich $x = +2.''1$ (die Uhr zu wenig), und aus den Beobachtungen der vorhergehenden Tage fand er, dass diese Uhr täglich $0.''1715$ gegen mittlere Zeit zurückblieb. Den 27. Junius kam er mit derselben auf der Sternwarte Seeberg an, und fand daselbst aus correspondirenden Höhen die Uhrzeit des Chronometers am 27. Junius im wahren Mittage Seebergs $T = 23^h\ 19'\ 3.''40$.

Allein die mittlere Zeit im wahren Mittage Londons für den 27. Junius ist (aus den Tafeln oder den Ephemeriden) gleich $0^h\ 2'\ 34.''3$

Es war aber $x = \quad -2.1$

In 29 Tagen Verspätung der Uhr $(0.1715)\,29 = \quad -4.97$

also am 27. Junius Uhrzeit des Chronometers im wahren Mittage Londons $T' = 0\ \ 2\ \ 27.23$

woraus sofort die Längendifferenz zwischen London und Seeberg folgt

$$T' - T = 0^h\ 43'\ 23.''83.$$

3. §. Da die Rectascension des Mondes sich so schnell ändert (bis 15° in einem Tage), so werden diese Rectascensionen zur Zeit seiner Culmination in zwey verschiedenen Meridianen selbst verschieden seyn, und ein Mittel geben, die Längendifferenz der Beobachtungsorte zu bestimmen.

Sey t der durch Beobachtung der Culminationen gefundene Unterschied der wahren Rectascension des Mondrandes, und eines nahen Fixsternes (positiv genommen, wenn die

Rectascension des Mondes grösser ist, als die des Sternes) an dem westlichen Beobachtungsorte, und τ dasselbe für den östlichen Ort, beyde in Zeitsecunden ausgedrückt. Diese Grössen t und τ drücken also den Rectascensionsunterschied des Mondes und des Sternes, und zwar zur Zeit der Culmination des Mondes an den beyden Orten aus. Man muss aber diese Rectascensionsunterschiede nicht für die Zeit der Culmination des Mondes, sondern für die Zeit der Culmination des Sternes nehmen. Da nämlich die Rectascension des Fixsternes während der Zwischenzeit sich nicht ändert, so culminirt der Fixstern an dem westlichen Orte um eben so viel (in Sternzeit) später, als an dem östlichen, wie viel die Längendifferenz beyder Orte beträgt, und daher wird die Rectascension des Mondes zur Zeit der Culmination des Fixsternes an dem westlichen Orte grösser seyn, als zur Zeit seiner Culmination an dem östlichen, um eine Grösse, die der Längendifferenz beyder Orte proportional ist.

Sey also b in Bogensecunden die Änderung der Rectascension des Mondes in einer Stunde Sternzeit, so ist für den Augenblick der Culmination des Sternes jene Rectascensionsdifferenz in Zeitsecunden

$$t - \frac{b\,t}{15 \cdot 60^2} \text{ für den einen Ort, und}$$

$$\tau - \frac{b\,\tau}{15 \cdot 60^2} \text{ für den anderen,}$$

also ist auch beyder Unterschied, d. h. die wahre Änderung der Rectascension des Mondes während der Zeit zwischen beyden Culminationen des Sternes

$$t - \tau - \frac{b\,(t - \tau)}{15 \cdot 60^2} \text{ oder,}$$

wenn $t - \tau = a$ ist, in Bogensecunden

$$\Delta = 15\left(a - \frac{a\,b}{15 \cdot 60^2}\right).$$

Kennt man aber Δ, so ist die gesuchte Längendifferenz x in Zeitsecunden $b : 3600'' = \Delta : x$, oder

$$x = \frac{3600\,\Delta}{b}, \text{ oder endlich}$$

$$x = 15\,(3600)\,\frac{a}{b} - a.$$

Nimmt man auf die Verschiedenheit der scheinbaren Mondeshalbmesser in beyden Beobachtungen Rücksicht, so sey r und p der wahre Halbmesser und die wahre Poldistanz des Mondes an dem ersten oder westlichen, und ρ π an dem östlichen Orte, so hat man

$$a = t - \tau \mp \tfrac{1}{15}\left(\frac{r}{\text{Sin } p} - \frac{\rho}{\text{Sin } \pi}\right) \ldots\ldots (I),$$

das untere Zeichen, wenn der westliche, das obere, wenn der östliche Mondesrand beobachtet wurde.

Ist ferner überhaupt b in Bogensecunden die Änderung der Rectascension des Mondes in einer Stunde einer gewissen Zeit, und m das Verhältniss der Stunde dieser Zeit zur Stunde der Sternzeit, so ist

$$x = 15\,(3600)\,\frac{a\,m}{b} - a \ldots\ldots (II).$$

Ist z. B. b die Bewegung des Mondes in einer Stunde Sternzeit, so ist, wie oben, $m = 1$. Ist aber b die Bewegung des Mondes in einer Stunde mittlerer Zeit, so ist $m = 1.00274$ u. s. w., und die beyden Gleichungen (I) und (II) geben den gesuchten Längenunterschied der beyden Beobachtungsorte.

Ex. Man beobachtete die Sternzeiten der Culmination des Mondes

in Gotha	13^h	47′	32.″45	in Manheim	13^h	47′	53.″0
α Virginis	13	14	17.87		13	14	17.2
		33	14.58			33	35.8

also $t - \tau = a = 21.''22$.

Die Änderung der Rectascension des Mondes in einer Stunde Sternzeit ist $0°\,34'\,44.''998$, also $b = 2084.''998$ und $m = 1$, und daher gibt die Gleichung (II)

$$x = \frac{15\,(3600)\,(21.22)}{2084.998} - 21.22 = 528.''36 = 0^h\,8'\,48.''36.$$

4. §. Da besonders zur See die Gelegenheit, die geographische Länge zu bestimmen, nicht oft genug gegeben werden kann, so hat man zu dieser Absicht sehr vortheilhaft die Beobachtungen der Distanzen des Mondes von Sternen vorgeschlagen.

Die astronomischen Ephemeriden enthalten nämlich diese Distanzen des Mondes von der Sonne, von den gröss-

ten Fixsternen oder von den hellesten Planeten von drey zu drey Stunden jedes Tages, z. B. für den Pariser Meridian so berechnet, wie sie aus dem Mittelpuncte der Erde gesehen, erscheinen würden. Hat man daher auf irgend einem Puncte der Oberfläche der Erde eine solche Distanz beobachtet, so wird man sie zuerst von der Refraction und Parallaxe befreyen, d. h. sie ebenfalls auf den Mittelpunct der Erde reduciren, und dann in den Ephemeriden die Pariser Zeit suchen, für welche der Rechnung gemäss dieselbe geocentrische Distanz Statt hat, welche Zeit mit der Ortszeit der Beobachtung verglichen, sofort die gesuchte Länge des Beobachtungsortes gibt.

I. Um die Höhenparallaxe sowohl, als die Refraction beyder Gestirne zu finden, muss man ihre Höhen kennen. Wir wollen also annehmen, dass man kurz vor und nach der gemessenen Distanz D auch die Höhen beyder Gestirne beobachtet habe, woraus man denn, da man die Höhenänderung derselben für die gegebene Zwischenzeit der Beobachtungen kennt, durch eine einfache Proportion auch diejenigen Höhen derselben ableiten kann, welche für die Beobachtungszeit der Distanz D selbst gehören. Sey also für diese letzte Zeit b die beobachtete Höhe des oberen Randes der Sonne, und B die des oberen Randes des Mondes, wo wir hier und im folgenden die kleinen Zeichen b p.. für das Gestirn, und die grossen B, P.. für den Mond beybehalten wollen. Für dieselbe Zeit der beobachteten Distanz sucht man aus den Ephemeriden die horizontalen Halbmesser r R, und die Horizontalparallaxen p P beyder Gestirne, so hat man für die scheinbare Höhe des Mittelpunctes (Seite 93)

der Sonne $h' = b - r - r\,p \operatorname{Sin} b . \operatorname{Sin} 1''$,
des Mondes $H' = B - R - R\,P \operatorname{Sin} B . \operatorname{Sin} 1''$,

und wenn man für diese Höhen h′ und H′ die Refraction sucht, so erhält man die wahre Höhe des Mittelpunctes

der Sonne $h = h' - \text{Refr} + p \operatorname{Cos} h'$,
des Mondes $H = H' - \text{Refr} + P \operatorname{Cos} H'$.

Hat man den unteren Rand dieser Gestirne beobachtet, so ist r und R negativ.

Aus derselben Ursache, aus welcher man die Höhen des oberen oder unteren Randes der beyden Gestirne beobachtet, misst man auch, nicht die Distanz ihrer Mittelpuncte, sondern die ihrer Ränder. Hat man daher die Distanz D ihrer nächsten oder inneren Ränder beobachtet, so ist die beobachtete Distanz Δ' ihrer Mittelpuncte

$$\Delta' = D + r(1 + p \sin h \sin 1'') + R(1 + P \sin H \sin 1''),$$

in welchem Ausdrucke r oder R negativ wird, wenn man den äusseren Rand der Sonne oder des Mondes beobachtet hat.

II. Kennt man so die Grössen h h', H H' und Δ', so kann man daraus die geocentrische Distanz Δ auf folgende Art finden.

Ist ω die Differenz des Azimuts beyder Gestirne, so ist

$$\cos \Delta = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos \omega, \text{ und}$$
$$\cos \Delta' = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos \omega.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$M = \frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'},$$

$$N = \cos \frac{H' + (h' + \Delta')}{2} \cos \frac{H' + (h' - \Delta')}{2}, \text{ und}$$

$$P = \sin \frac{\Delta' + (H' - h')}{2} \sin \frac{\Delta' - (H' - h')}{2},$$

so gibt die zweyte der beyden vorhergehenden Gleichungen sofort

$$\sin \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{P}{\cos H' \cos h'}} \text{ und } \cos \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{N}{\cos H' \cos h'}}.$$

Die erste derselben aber gibt

$$\cos \Delta = \cos(H - h) - 2 \cos H \cos h \sin^2 \frac{\omega}{2}, \text{ oder}$$

$$\cos \Delta = 2 \cos H \cos h \cos^2 \frac{\omega}{2} - \cos(H + h), \text{ oder endlich}$$

$$\cos \Delta = \cos(H - h) \cos^2 \frac{\omega}{2} - \cos(H + h) \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

Substituirt man in den drey letzten Gleichungen die vorhergehenden Werthe von $\sin \frac{\omega}{2}$ und $\cos \frac{\omega}{2}$, so erhält

man verschiedene Ausdrücke für den gesuchten Werth von Δ. So gibt der zweyte Werth

$$\text{Cos}\,\Delta = 2\,MN - \text{Cos}\,(H + h),\ \text{oder auch}$$

$$\text{Sin}^2\,\frac{\Delta}{2} = \text{Cos}^2\,\frac{H+h}{2} - MN,\ \text{und}$$

$$\text{Cos}^2\,\frac{\Delta}{2} = \text{Sin}^2\,\frac{H+h}{2} + MN.$$

Setzt man also der grösseren Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sin}\,A = \text{Sec}\,\frac{H+h}{2}\sqrt{MN},\ \text{so ist}\ \text{Sin}\,\frac{\Delta}{2} = \text{Cos}\,\frac{H+h}{2}\,\text{Cos}\,A \\ \text{oder} \\ \text{tg}\,B = \text{Cosec}\,\frac{H+h}{2}\sqrt{MN},\ \text{so ist}\ \text{Cos}\,\frac{\Delta}{2} = \text{Sin}\,\frac{H+h}{2}\,\text{Sec}\,B \end{array}\right\}\ \text{I.}$$

Sucht man eben so aus dem ersten der drey vorhergehenden Ausdrücke von Cos Δ die Werthe von

$$\text{Sin}^2\,\frac{\Delta}{2}\ \text{und}\ \text{Cos}^2\,\frac{\Delta}{2},$$

so findet man auf gleiche Art

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sin}\,C = \text{Sec}\,\frac{H-h}{2}\sqrt{MP}\ \text{und}\ \text{Cos}\,\frac{\Delta}{2} = \text{Cos}\,\frac{H-h}{2}\,\text{Cos}\,C \\ \text{oder} \\ \text{tg}\,D = \text{Cosec}\,\frac{H-h}{2}\sqrt{MP}\ \text{und}\ \text{Sin}\,\frac{\Delta}{2} = \text{Sin}\,\frac{H-h}{2}\,\text{Sec}\,D \end{array}\right\}\ \text{II.}$$

Ex. In Seeberg wurde am 9. September 1792 um $20^h\ 3'\ 29.''2$ wahrer Zeit des Morgens die Distanz der beyden inneren Ränder der Sonne und des Mondes

$$D = 67^\circ\ \ 36'\ \ 50''$$

beobachtet. Für dieselbe Zeit war die beobachtete Höhe des oberen Randes der Sonne $b = 22^\circ\ \ 58'\ \ 34.''4$
und des Mondes $B = 55^\circ\ \ 38'\ \ 54.''0$

Für dieselbe Zeit ist endlich aus den Ephemeriden

	Sonne	Mond
horizontaler Halbmesser	957.″4	878.″0
horizontale Parallaxe	7.8	3250.6
Refraction	135.0	38.9

also Höhenparallaxe der Sonne $p' = 7.8\,\text{Cos}\,b = 7.''2$
des Mondes $P' = 3250.6\,\text{Cos}\,B = 1830''$

vergrösserter Halbmesser der Sonne

$$957.4\,(1 + p\,\text{Sin}\,b\,\text{Sin}\,1'') = 957.''4$$

des Mondes

$$878\,(1 + P\,\text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,1'') = 900.''0.$$

Wir haben daher

$$\varDelta' = D + 957.4 + 900.0 = 68^\circ \quad 7' \quad 47''$$

$$h' = 22^\circ \quad 42' \quad 37'' \qquad H' = 55^\circ \; 43' \quad 54''$$

$$h = h' - \text{Refr} + p' = 22^\circ \quad 40' \quad 29''$$

$$H = H' - \text{Refr} + P' = 56^\circ \quad 13' \quad 45''.$$

Mit diesen fünf Grössen findet man aus der ersten der Gleichungen I

$$\log M = 9.9955246$$

$$\log N = 9.4570226$$

$$A = 43^\circ \quad 31' \quad 55'', \text{ und}$$

$$\varDelta = 68^\circ \quad 5' \quad 11''$$

gesuchte geocentrische Distanz der Mittelpuncte.

In den Ephemeriden findet man aber

wahre Zeit Paris	Distanz der Mittelpuncte
$18^h \; 0'$	$68^\circ \; 45' \; 50''$
21 0	67 24 28

Daher ist $x = \dfrac{(0^\circ \; 40' \; 39'')3^h}{1^\circ \; 21' \; 22''} = 1^h \; 29' \; 55.''6$

	18		
wahre Zeit Paris	19	29	55.6
wahre Zeit Seeberg	20	3	29.2
gesuchte Längendifferenz	0	33	33.6

III. Das vorhergehende Verfahren hat noch die Unbequemlichkeit, dass es nebst der Beobachtung der Distanz D auch noch wenigstens zwey beobachtete Höhen der Sonne und des Mondes voraussetzt. Man wird aber die vier letzten Beobachtungen umgehen, wenn man die Werthe von h h' und H H' unmittelbar durch Rechnung sucht, was um so leichter ist, da man diese Grössen nicht mit der äussersten Schärfe braucht. Ist nämlich t der Stundenwinkel, p die Poldistanz, und ψ die Äquatorhöhe, so hat man

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{Cos} t \operatorname{tg} \psi, \text{ und}$$

$$\operatorname{Sin} h = \frac{\operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} (p - x)}{\operatorname{Cos} x},$$

und wenn man so h kennt, so ist die scheinbare Höhe des Mittelpunctes der Sonne $h' = h + \text{Refr} - p'$.

Ganz eben so wird man anch für den Mond verfahren. Der Stundenwinkel t der Sonne ist bekanntlich gleich der wahren Zeit der Beobachtung, und da man hat

$$t + \text{Rectasc} \odot = \text{Rectasc} ☾ + \text{Stundenw} ☾,$$

so ist auch der Stundenwinkel des Mondes bekannt. In unserem Beyspiele ist für die wahre Zeit

$$20^h\ 3'\ 29.''2 = 300°\ 52'\ 18'' = t$$

Rectascension ☉ = 169° 9′ 15″ Poldistanz ☉ = 85° 19′ 45″
Rectascension ☾ = 100 40 30 Poldistanz ☾ = 72 0 10

68 28 45
t = 300 52 18

Stundenwinkel ☾ = 9 21 3.

Die Äquatorhöhe von Seeberg endlich ist $\psi = 39° 3' 43''$, also hat man für die Sonne

$$x = 22°\ 36'\ 30'',\ h = 22°\ 40'\ 29'',\ h' = 22°\ 42'\ 37'',$$

und eben so für den Mond

$$x = 38°\ 41'\ 15'',\ H = 56°\ 13'\ 46'',\ H' = 55°\ 43'\ 54''$$

wie zuvor.

5. §. In dem Vorhergehenden wurden die beobachteten Distanzen des Mondes von anderen Gestirnen auf die aus dem Mittelpuncte der Erde gesehenen Distanzen reducirt, und mit den aus den Mondestafeln durch Rechnung gefundenen, ebenfalls geocentrischen Distanzen verglichen, weil diese letzten, wenn sie anders beobachtet werden könnten, für alle Bewohner der Erde tautochrone Erscheinungen, die allein zu Längenbestimmungen geeignet sind, seyn würden. Die schnelle Bewegung des Mondes, und die dadurch entstehenden schnellen Änderungen seiner Distanzen machen ihn zu diesem Zwecke vorzüglich geschickt. Ganz auf dieselbe Art könnte man nun auch die beobachteten Zeiten des Anfanges und des Endes einer Sonnenfinsterniss, oder der Bedeckung eines Sternes von dem Monde auf die Zeiten der geocentrischen Zusammenkunft der Mittelpuncte des Mondes und des bedeckten Gestirnes reduciren, und diese mit der aus den Tafeln berechneten, oder besser, mit der aus der Beobachtung an einem Orte auf dieselbe Art gefundenen Zeit der geocentrischen Zusammenkunft vergleichen, wo dann die Differenz dieser beyden geocentrischen Conjunctionen auch sofort die Differenz der geographischen Länge der beyden Beobachtungsorte seyn wird. Die beobachteten Zeiten der inneren oder äusseren Berührungen sind nämlich ebenfalls die Zeiten von beobachteten Distanzen, aber diese

Distanzen sind erstens genau bekannt, da sie der Summe oder der Differenz der scheinbaren Halbmesser der Gestirne gleich sind, und zweytens lassen sich die Momente der Berührungen der Ränder, besonders bey Sternbedeckungen, mit grosser Schärfe beobachten, daher denn auch die Längenbestimmungen bey Sternbedeckungen durch Genauigkeit sich vor allen anderen auszeichnen. Die einfachste und sicherste Art der Berechnung dieser Beobachtungen ist folgende.

Aus den Tafeln oder aus genauen Ephemeriden sucht man für zwey Pariser Zeiten, welche etwa eine oder zwey Stunden von einander entfernt sind, und welche nahe die ganze Zeit der Dauer der Finsterniss umfassen, die wahre Länge und Poldistanz, den Halbmesser und die Horizontalparallaxe beyder Gestirne, und daraus nach Seite 97 auch die scheinbare, oder von der Parallaxe afficirte Länge und Poldistanz, so wie den scheinbaren Halbmesser beyder Gestirne, und daraus endlich die beyden Grössen f und g durch folgende Ausdrücke

$$f = \frac{\text{stündliche Änderung} ☾ - \text{stündliche Änderung} ☉}{3600}$$

in scheinbarer Länge,

$$g = \frac{\text{stündliche Änderung} ☾ - \text{stündliche Änderung} ☉}{3600}$$

in scheinbarer Poldistanz.

Diess vorausgesetzt, sey T die gegebene Ortszeit des beobachteten Anfanges oder Endes der Finsterniss, oder der Sternbedeckung, und t die nur beynahe bekannte östliche Länge dieses Ortes von Paris (für eine westliche Länge ist t negativ). Für die Zeit (T — t) suche man aus dem Vorhergehenden durch eine einfache Proportion

die scheinb. Länge des Monds a, und der Sonne od. des Sterns α
die scheinb. Poldistanz p, - - - - π
den scheinb. Halbmesser r, - - - - ρ
(für Fixsterne ist $\rho = 0$).

Dieses vorausgesetzt, hat man in dem sphärischen Dreyecke zwischen den Mittelpuncten beyder Gestirne und dem Pole der Ecliptik

$$\text{Cos}\,(r \pm \rho) = \text{Cos}\,p\,\text{Cos}\,\pi + \text{Sin}\,p\,\text{Sin}\,\pi\,\text{Cos}\,(a - \alpha),$$

das obere Zeichen für die äusseren, das untere für die inneren Berührungen beyder Körper.

Diese Gleichung lässt sich auch so ausdrücken

$$\mathrm{Sin}^2 \frac{r \pm \rho}{2} = \mathrm{Sin}^2 \frac{p - \pi}{2} + \mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Sin}\, \pi\, \mathrm{Sin}^2 \frac{a - \alpha}{2},$$

oder da $r \pm \rho$, $p - \pi$ und $a - \alpha$ nur kleine Grössen sind, wenn man der Kürze wegen $\mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Sin}\, \pi = \mathrm{Sin}\, P$ setzt;

$$(r \pm \rho)^2 = (p - \pi)^2 + (a - \alpha)^2\, \mathrm{Sin}^2 P,$$

und diese Gleichung muss Statt haben, wenn alle vorhergehenden Elemente a, p, r, α, π, ρ, und auch die oben vorausgesetzte Länge t des Beobachtungsortes richtig sind.

Nehmen wir nun an, dass die Grössen a, p, r und t fehlerhaft, und dass die wahren Werthe derselben $a + da$, $p + dp$, $r + dr$ und $t + dt$ sind, wo da, dp, dr, dt unbekannte Grössen bezeichnen, die wir suchen sollen.

Nach dieser Voraussetzung wird also die vorhergehende Gleichung in folgende übergehen

$$(r + dr \pm \rho)^2 = (p + dp - \pi - g dt)^2 + (a + da - \alpha - f dt)^2 . \mathrm{Sin}^2 P$$

oder, wenn man die zweyten Potenzen von da, dp, dr und dt weglässt,

$$\begin{aligned}(r \pm \rho)^2 + 2 (r \pm \rho)\, dr = (p - \pi)^2 &+ 2 (p - \pi)(dp - g dt) \\ &+ (a - \alpha)^2\, \mathrm{Sin}^2 P \\ &+ 2 (a - \alpha)(da - f dt)\, \mathrm{Sin}^2 P.\end{aligned}$$

Setzt man aber

$$\mathrm{tg}\, \omega = \frac{p - \pi}{(a - \alpha)\, \mathrm{Sin}\, P}, \text{ und } \Delta = \frac{(a - \alpha)\, \mathrm{Sin}\, P}{\mathrm{Cos}\, \omega},$$

also auch $\mathrm{Sin}\, \omega = \dfrac{p - \pi}{\Delta}$,

so hat man

$$\Delta^2 = (p - \pi)^2 + (a - \alpha)^2\, \mathrm{Sin}^2 P,$$

und daher geht der letzte Ausdruck von $(r \pm \rho)^2$ in folgenden über

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^2 - (r \pm \rho)^2}{2 \Delta} = (f\, \mathrm{Sin}\, P\, \mathrm{Cos}\, \omega + g\, \mathrm{Sin}\, \omega)\, dt &- da\, \mathrm{Sin}\, P\, \mathrm{Cos}\, \omega \\ &- dp\, \mathrm{Sin}\, \omega \\ &+ (r \pm \rho) \frac{dr}{\Delta} . \quad (\mathrm{I}),\end{aligned}$$

und dieses ist die Bedingungsgleichung, welche für jeden Ein- oder Austritt an jedem der Beobachtungsorte entwickelt werden soll.

Hat man an demselben Orte die beyden inneren und äusseren Berührungen beobachtet, so hat man vier Gleichungen (I) der Form

$$M = A\,dt + B\,da + C\,dp + D\,dr,$$

aus welchen man daher die vier Grössen dt, da, dp und dr durch Elimination finden wird. Hat man an dem einen Orte nur zwey Beobachtungen, so hat man zwey Gleichungen (I), deren Differenz eine Gleichung der Form

$$M = A\,da + B\,dp + C\,dr$$

gibt. Eben so geben zwey Beobachtungen an zwey anderen Orten die analogen Gleichungen

$$M' = A'\,da + B'\,dp + C'\,dr, \text{ und}$$
$$M'' = A''\,da + B''\,dp + C''\,dr,$$

und aus den drey letzten Gleichungen findet man die Werthe von da, dp und dr. Kennt man aber diese Werthe, so gibt jede der Gleichungen (I) den Werth dt für den einen, und dt', dt'' für die beyden anderen Beobachtungsorte u. s. w.

Sollte der Fehler dt der vorausgesetzten Längendifferenz zu gross seyn, um die Quadrate desselben vernachlässigen zu können, so müsste man mit dem durch das Vorhergehende gefundenen verbesserten t die Rechnung wiederhohlen. Auch hat man, wenn man das Quadrat von dt noch berücksichtigen will, statt (I) folgende Bedingungsgleichung

$$\frac{\Delta^2 - (r \pm \rho)^2}{2\Delta} + (f^2 \sin^2 P + g^2)\frac{dt^2}{2\Delta} - (f \sin P \cos \omega + g \sin \omega)\,dt$$
$$+ da.\sin P \cos \omega + dp.\sin \omega - (r \pm \rho)\frac{dr}{\Delta} = 0.$$

Ex. Den 8. August 1798 wurde in Leipzig beobachtet

ε Zwillinge Eintritt in den Mondesrand	13^h	35′	17.″5
Austritt aus dem Mondesrand	14	19	31.3

mittlerer Zeit Leipzig.

Die sonst schon sehr nahe bekannte Meridiandifferenz von Leipzig und Paris ist $t = 0^h\ 40'\ 7.''5$. Aus den Tafeln des Mondes und den Parallaxengleichungen Seite 90 findet man für die mittlere Pariser Zeit

	12^h	55′	10.″0 . .	13^h	39′	23.″8
scheinbare Länge des ☾	96°	51′	45.″2	97°	20′	1.″0
scheinbare Poldistanz des ☾	87	52	17.5	87	47	27.9
scheinbarer Halbmesser des ☾	0	16	5.8	0	16	7.9

wobey vorausgesetzt wurde Polhöhe: $51° \; 10' \; 11''$, und Horizontalparallaxe des ☾ für Leipzig $0° \; 58' \; 46.''8 \, . . \, 0° \; 58' \; 48.''4$.

Aus der scheinbaren (durch Präcession, Aberration und Nutation veränderten) Rectascension und Declination des Sternes findet man für den Tag der Beobachtung dessen

scheinbare Länge	$\alpha = 97°$	$7'$	$5.''2$
scheinbare Poldistanz	$\pi = 87$	57	11.9
Halbmesser	$\rho = 0.$		

Die Differenz der zwey Poldistanzen des Mondes ist $-4' \; 49.''6$, für die Zwischenzeit

$$0^h \; 44' \; 13.''8 = 0^h.73717,$$

also ist die stündliche Änderung der scheinbaren Poldistanz

$$\text{des Mondes} = -\frac{289.''6}{0.73717} = -393'',$$

und daher

$$g = -\frac{393}{3600} = -0.10916,$$

und eben so

$$f = +\frac{2301}{3600} = +0.63916.$$

Wir haben daher für den Eintritt des Sterns, wenn $t = 0^h \; 40' \; 7.''5$ gesetzt wird,

$$a - \alpha = -920.''0 \qquad p - \pi = -294.''4$$

$$P = 87° \; 55', \quad \omega = 17° \; 45' \; 20'', \quad \Delta = -965.''4$$

$$r + \rho = 965.''8,$$

also auch die Gleichung (I), wenn man $dr = 0$ setzt,

$$0.4 = 0.59\,dt - 0.95\,da - 0.30\,dp \ldots\ldots (a).$$

Eben so ist für den Austritt

$$a - \alpha = +775.''8, \quad p - \pi = -584.''0$$

$$P = 87° \; 52', \quad \omega = -36° \; 59' \; 31'', \quad \Delta = 970.''6$$

$r + \rho = 967.''9$, und daher die Gleichung (I)

$$2.7 = 0.57\,dt - 0.80\,da + 0.60\,dp \ldots\ldots (b).$$

Hat man sonst keine anderen Beobachtungen, so kann man nebst dt nur noch eine der zwey Grössen da und dp finden. Setzt man $da = 0$, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} 0.4 = 0.59\,dt - 0.30\,dp \\ 2.7 = 0.57\,dt + 0.60\,dp \end{array}\right\},$$

woraus folgt

$$dt = +2.''0, \quad \text{und}$$

$$dp = +2.''6,$$

oder die oben angenommene Poldistanz des Mondes muss um 2."6 vergrössert werden, um die wahre Poldistanz des Mondes zu erhalten, und eben so muss die oben angenommene Längendifferenz $t = 0^h\ 40'\ 7.''5$ um 2."0 Zeitsecunden vergrössert werden, so dass die wahre Länge Leipzigs von Paris gleich $0^h\ 40'\ 9.''5$ ist. Hätte man dp und da gleich Null vorausgesetzt, so gäben jene beyden Bedingungsgleichungen

$$0.4 = 0.59\,dt$$
$$2.7 = 0.57\,dt$$

Im Mittel $1.5 = 0.58\,dt$,

also $dt = 2.''67$ nahe wie zuvor.

Vorlesung V.

Bestimmung des Azimuts, der Schiefe der Ecliptik u. s. w.

1. §. Es wurde bereits oben (Seite 178) gezeigt, wie man aus zwey beobachteten Distanzen eines Gestirnes von einem terrestrischen Objecte die Lage des letzteren gegen den Äquator, oder auch gegen den Horizont finden kann. Wir wollen nun sehen, wie man auch aus einer einzelnen Distanz Δ eines Gestirnes von dem Objecte das Azimut des letzten bestimmen kann.

Ist nämlich t der bekannte Stundenwinkel des Gestirnes zur Zeit der beobachteten Distanz, so findet man das Azimut ω des Gestirnes, und die Zenithdistanz z desselben durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{Cos} t \operatorname{tg} \psi, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} n = \frac{\operatorname{Cotg} p}{\operatorname{Cos} t},$$

$$\operatorname{Cos} z = \frac{\operatorname{Cos} \psi}{\operatorname{Cos} m} \operatorname{Cos}(m - p), \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{Cos} n \operatorname{tg} t}{\operatorname{Cos}(\psi + n)},$$

$$\operatorname{Sin} \omega = \frac{\operatorname{Sin} t \operatorname{Sin} p}{\operatorname{Sin} z}, \quad \operatorname{Sin} z = \frac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Sin} \omega},$$

wo ψ die Äquatorhöhe, und p die Poldistanz des Gestirnes bezeichnet.

Aus dieser berechneten wahren Zenithdistanz z findet man die scheinbare Zenithdistanz z' durch die Gleichung

$$z' = z - \text{Refr} + \text{Höhenparallaxe},$$

wo aber, wie Seite 175, die Refraction für die anfangs gesuchte genäherte Zenithdistanz z' (nicht für z) genommen werden muss.

Hat man nun, nebst der Distanz Δ des Gestirnes von dem Objecte, auch noch die Zenithdistanz Z des Objectes beobachtet, und nennet man Δ' die auf den Horizont redu-

cirte Distanz des Gestirnes von dem Objecte, so findet man Δ' aus der Gleichung

$$\mathrm{Sin}\,\frac{\Delta'}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\Delta + z' - Z}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\Delta - z' + Z}{2}}{\mathrm{Sin}\,z'\,\mathrm{Sin}\,Z}}\,.$$

Ist $\frac{1}{2}\Delta'$ nahe an 90°, so wird man besser den ähnlichen Ausdruck für $\mathrm{Cos}\,\frac{\Delta'}{2}$ wählen. Kennt man aber so das Azimut ω des Gestirnes, und die horizontale Distanz Δ' des Gestirnes von dem Objecte, so ist das gesuchte Azimut des Objectes gleich der Summe oder Differenz der Grössen ω und Δ'.

I. Setzt man in dem Dreyecke zwischen dem Pol, dem Zenith und dem Gestirn die Seiten ψ und z constant, so erhält man

$$d\,\omega = d\,t\,.\,\frac{\mathrm{Sin}\,p}{\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Cos}\,\nu},$$

wo ν der Winkel des Declinationskreises mit dem Vertikalkreise ist. Setzt man eben so in dem Dreyecke zwischen Zenith, Gestirn und dem Objecte die Seiten Z und z' constant, so erhält man

$$d\,\Delta = d\,\Delta'\,\mathrm{Sin}\,z'\,\mathrm{Sin}\,u\,,$$

wo u der Winkel an dem Gestirn, also

$$\mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Sin}\,\Delta = \mathrm{Sin}\,Z\,\mathrm{Sin}\,\Delta'\,,$$

und daher

$$d\,\Delta' = \frac{d\,\Delta\,\mathrm{Sin}\,\Delta}{\mathrm{Sin}\,z'\,\mathrm{Sin}\,Z\,\mathrm{Sin}\,\Delta'}$$

ist. Beyde Ausdrücke für $d\,\omega$ und $d\,\Delta'$ zeigen, dass man, um die Beobachtungsfehler $d\,t$ in der Zeitbestimmung, und $d\,\Delta$ in der gemessenen Distanz unschädlich zu machen, das Gestirn nahe an dem Horizonte, wo $\mathrm{Sin}\,z$ nahe gleich der Einheit ist, beobachten soll.

Ex. Sey die wahre Zeit $5^h\ 17'\ 26.''8$ der beobachteten Distanz $\Delta = 78^\circ\ 28'\ 3''$ des Mittelpunctes der Sonne von einem Objecte,

$$\text{und } \psi = 46^\circ\ 52'\ 58'', \quad p = 93^\circ\ 17'\ 16''$$

so ist

$$t = 79^\circ\ 21'\ 42'', \quad m = 11^\circ\ 9'\ 11.''9,$$

Refraction = 8′ 57.″5, Höhenparallaxe = 8.″0, also scheinbare Zenithdistanz des Mittelpunctes der Sonne

$$z' = 84^\circ\ 22'\ 56.''2, \text{ und}$$
$$\omega = 80^\circ\ 17'\ 36.''4.$$

Die Zenithdistanz des Objectes sey

$$Z = 88^\circ\ 46'\ 0'', \text{ so ist}$$
$$\varDelta' = 78^\circ\ 33'\ 3.''4,$$

und daher das gesuchte Azimut des Objectes

$$\omega - \varDelta' = 1^\circ\ 44'\ 33.''0.$$

2. §. Wenn man das Azimut eines Objectes mit grosser Schärfe verlangt, so wird man, statt des Sextanten, die zu diesem Zwecke mehr angemessenen Theodoliten brauchen, und mit diesen unmittelbar die horizontale Distanz $\varDelta'$ des Gestirnes von dem Objecte messen, und aus der gegebenen Beobachtungszeit, wie zuvor, das Azimut ω des Gestirnes durch Rechnung ableiten, wo dann wieder die Summe oder Differenz von $\varDelta'$ und ω das gesuchte Azimut des Objectes seyn wird. Hat man mehrere solcher horizontalen Distanzen gemessen, oder multiplicirt der Theodolit, so wird man mit ihnen auf eine ähnliche Art, wie Seite 209, verfahren.

Auch zu den Azimutalbeobachtungen eignen sich besonders die Beobachtungen des Polarsternes in irgend einem Puncte seines Parallels. Man hat für das Azimut ω desselben

$$\text{Cotg}\,\omega = \frac{\text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,t - \text{Cotg}\,p\,\text{Cos}\,\varphi}{\text{Sin}\,t},$$

wo φ Polhöhe, t Stundenwinkel, und p Poldistanz des Sterns ist. Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$\text{tg}\,\omega = -\frac{\text{tg}\,p\,\text{Sin}\,t\,\text{Sec}\,\varphi}{1 - \text{tg}\,p\,\text{tg}\,\varphi\,\text{Cos}\,t},$$

oder in einer Reihe aufgelöset

$$\text{tg}\,\omega = -\frac{p\,\text{Sin}\,t}{\text{Cos}\,\varphi}\left\{\begin{array}{l}1 + p\,\text{tg}\,\varphi\,\text{Cos}\,t + p^2\left(\frac{1}{3} + \text{tg}^2\,\varphi\,\text{Cos}^2\,t\right) \\ + p^3\,\text{tg}\,\varphi\,\text{Cos}\,t\left(\frac{2}{3} + \text{tg}^2\,\varphi\,\text{Cos}^2\,t\right)\ldots\end{array}\right\},$$

und endlich daraus

$$\omega = -\frac{p\,\text{Sin}\,t}{\text{Cos}\,\varphi} - \frac{p^2\,\text{tg}\,\varphi\,\text{Sin}\,2\,t\,\text{Sin}\,1''}{2\,\text{Cos}\,\varphi}$$
$$-\frac{p^3\,\text{Sin}\,t}{3\,\text{Cos}^3\,\varphi}\left(\text{Cos}^2\varphi + 3\,\text{Sin}^2\,\varphi\,\text{Cos}^2\,t - \text{Sin}^2\,t\right)\text{Sin}^2\,1''.$$

Dieses vorausgesetzt, wird man also, analog mit S. 210, so verfahren.

Sey A das arithmetische Mittel der beobachteten Uhrzeiten, und B das Mittel aller auf dem Instrumente gelesener Azimutalwinkel des Sternes. Vor und nach diesen Winkelbeobachtungen des Sternes bringe man den vertikalen Faden des Instrumentes auf das irdische Object, und nenne C den gelesenen Azimutalwinkel des Objectes.

Die Uhrzeit A bringt man (durch die bekannte Corrêction der Uhr) auf Sternzeit, so ist der Stundenwinkel t der Mitte der Beobachtungen t = Sternzeit — scheinbare Rectascension.

Mit diesen Werthen von t suche man ω und $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ aus den Gleichungen

$$\omega = -p\,\frac{\text{Sin}\,t}{\text{Cos}\,\varphi} - \frac{p^2\,\text{tg}\,\varphi}{2\,\text{Cos}\,\varphi}\,\text{Sin}\,2\,t\,.\,\text{Sin}\,1'', \text{ und}$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{p\,\text{Sin}\,t\,\text{Sin}\,1''}{\text{Cos}\,\varphi} + \frac{2\,p^2\,\text{tg}\,\varphi\,\text{Sin}\,2\,t\,\text{Sin}^2\,1''}{\text{Cos}\,\varphi},$$

so ist das Azimut ω' des Sternes zur Zeit A gleich

$$\omega' = \omega + \frac{1}{N}\cdot\frac{d\omega^2}{dt^2}\,.\,\Sigma\,\frac{2\,\text{Sin}^2\frac{\theta}{2}}{\text{Sin}\,1''},$$

wo N die Anzahl der Beobachtungen, und θ, θ', θ''. die Differenzen der Uhrzeit der 1, 2, 3 Beobachtung von dem Mittel A der sämmtlichen Uhrzeiten, und wo endlich Σ das bekannte Summenzeichen ist.

Die Grösse ω' mit der Grösse B — C verglichen, gibt sodann das gesuchte Azimut des irdischen Gegenstandes.

Ex. Den 1. April 1817 wurde in Mailand beobachtet:

	Uhrzeit		horizontaler Kreis
	6ʰ 45′ 28.″		173° 6′ 11.″9
	50 48		173 6 15.1
	54 48		173 6 18.4
A =	6 50 21.3	B =	173 6 15.1
Correction der Uhr	— 2 27.0	C =	115 42 53.3
Sternzeit	6 47 54.3	B — C =	57 23 21.8
Scheinbare Rectascension	0 55 21.1		
t =	5ʰ 52 33.2		
	88° 8 18.0		

scheinbare Poldistanz $p = 1^\circ\ 40'\ 3.''6$

$$\frac{p \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cos} \varphi} = -8555.''9$$

$$\frac{p^2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Sin} 2t \operatorname{Sin} 1''}{2 \operatorname{Cos} \varphi} = -\quad 8.2$$

$$\omega = -8564.1 = -\quad 2^\circ 22' 44.''1$$

$$\frac{d^2 \omega}{N\, d t^2} \cdot \Sigma \frac{2 \operatorname{Sin}^2 \theta}{\operatorname{Sin} 1''} = \quad +\ 1.2$$

$$-2\ 22\ 42.9$$

$$180$$

$$177\ 37\ 17.1$$

$$B - \dot{C} = \quad 57\ 23\ 21.8$$

Azimut des Objectes $120\ 13\ 55.3$

$$\theta \ldots\ldots\ldots \frac{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\theta}{2}}{\operatorname{Sin} 1''}$$

0^h	$4'$	$53''$	$46.''8$
	0	27	0.4
	4	27	38.9

$\varphi = 45^\circ\ 28'$

$$\frac{d^2 \omega}{d t^2} = 0.0415.$$

3. §. Ist so das Azimut eines irdischen Objectes genau bestimmt, so ist dadurch auch die Richtung der Mittagslinie des Beobachtungsortes gegeben. Diese Richtung der Mittagslinie kann man auch unmittelbar durch einen Theodoliten finden, wenn man vor und nach der Culmination der Sonne oder eines Sternes gleiche Zenithdistanzen desselben beobachtet, wo dann die Mitte zwischen beyden Beobachtungen oder die Mitte des von dem Fernrohre auf dem horizontalen Kreise des Instrumentes durchlaufenen Bogens die gesuchte Richtung der Mittagslinie gibt, die man dann durch die Aufstellung eines entfernten irdischen Signales bezeichnen kann. Die Correction des so gefundenen Mittagspunctes des Instrumentes wegen der Änderung der Poldistanz der Sonne ist

$$d\omega = \frac{p - p'}{\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} t},$$

wo p' die Poldistanz der Sonne im Mittag, und p zur Zeit der nachmittägigen Beobachtung ist.

Das einfachste und sicherste Mittel, die Mittagslinie auf grosse Distanzen zu bestimmen, gibt das Mittagsrohr, von welchem weiter unten gehandelt werden wird. Ein anderes Verfahren s. m. Mor. Corr. 1801 u. 1803.

4 §. Da die Schiefe der Ecliptik eines der wichtigsten Elemente der praktischen Astronomie ist, so verdient ihre Beobachtung eine besondere Rücksicht.

Man beobachtet zu diesem Zwecke mehrere Tage vor und nach dem Solstitium die mittägige Zenithdistanz der Sonne (nach Seite 186). Es sey α die mittägige Rectascension der Sonne für diesen Tag, δ ihre Declination, φ die Polhöhe, e die Schiefe der Ecliptik, so ist die beobachtete Zenithdistanz $z = \varphi \mp \delta$, und die Meridian-Zenithdistanz zur Zeit des Solstitiums $Z = \varphi \mp e$ (das obere Zeichen für das Sommer-, das untere für das Winter-Solstitium), also die Reduction der beobachteten Zenithdistanz z auf das Solstitium

$$dz = \pm z \mp Z = e - \delta.$$

Es ist aber (Seite 31) $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} e \operatorname{Sin} \alpha$, woraus nach (Seite 60) folgt

$$e - \delta \text{ oder } dz = \theta^2 \operatorname{Sin} 2e - \frac{\theta^4}{2} \operatorname{Sin} 4e + \frac{\theta^6}{3} \operatorname{Sin} 6e - \frac{\theta^8}{4} \operatorname{Sin} 8e + ,$$

wo $\theta = \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \alpha}{2}$, und e die schon nahe bekannte Schiefe der Ecliptik bezeichnet. Dieses vorausgesetzt, hat man für die Zeit des Solstitiums die wahre Schiefe der Ecliptik

im Sommer $e' = \varphi - (z - dz)$,

und im Winter $e' = (z + dz) - \varphi$.

Man erhält so eben so viele Werthe von e', als man Beobachtungen hat. Das Mittel aus allen gibt dann die gesuchte wahre Schiefe E, und daraus folgt (Seite 75) die mittlere Schiefe $E - 8.''98 \operatorname{Cos} ☊ ☾$.

Ex. Im Jahre 1818 wurden folgende, bereits (nach Seite 199) auf den Meridian reducirte Zenithdistanzen des Mittelpunctes der Sonne erhalten

Juny	19	z =	24°	2′	45.″16
	20		24	1	51.46
	24		24	2	25.54.

Nimmt man $e = 23° \ 27' \ 55''$, so ist

$$dz = 5.17806\,\theta^2 - 5.01241\,\theta^4 + 4.53812\,\theta^6,$$

wo die numerischen Coefficienten schon Logarithmen sind. Daraus erhält man für die Beobachtung des

		Solstitial - Zenithdistanz
Juny 19	dz = 1′ 27.″31	z — dz = 24° 1′ 17.″85
20	0 33.91	24 1 17.55
24	1 8.25	24 1 17.29
	Mittel	z — dz = 24 1 17.56
	Polhöhe	φ = 47 29 12.50
	wahre Schiefe	e′ = 23 27 54.94

Den 22. Juny ist ☊ ☾ = 35° 58′, also 8.98 Cos ☊ ☾ = 7.66 und daher mittlere Schiefe E = 23° 27′ 47.″28.

5. §. Nicht minder wichtig ist die Bestimmung einer ersten absoluten Rectascension irgend eines Sterns, aus welcher sich dann die Rectascensionen aller übrigen durch blosse Beobachtungen der Rectascensions - Differenzen ableiten lassen.

Zu diesem Zwecke wird man zuerst die Culminationen mehrerer Sterne wiederholt an dem Mittagsrohre beobachten, wodurch man also die Rectascensions - Differenzen derselben mit aller Schärfe erhält. Nimmt man nun die Rectascension A eines dieser Sterne, aus den Beobachtungen anderer, als gegeben an, so sind dadurch auch die Rectascensionen aller übrigen Sterne gegeben. Ist aber diese Rectascension A des ersten Sternes, wie wir annehmen wollen, um die unbekannte Grösse dA zu klein, so werden auch die Rectascensionen aller übrigen Sterne (da wir ihre Rectascensions - Differenzen schon als genau betrachten können), um dieselbe Grösse dA zu klein, oder der gemeinschaftliche Fehler des ganzen Catalogs dieser Sterne wird gleich dA seyn.

Hat man nun an mehreren Tagen einen oder mehrere jener Sterne und zugleich die Sonne an dem Mittagsrohre, und überdiess auch die Zenithdistanz Z der Sonne an einem Kreise beobachtet, so geben erstens die Beobachtungen des Mittagsrohres (wenn man die Rectascensionen jener Sterne aus dem Cataloge nimmt) die Rectascension der Sonne, die wir α nennen wollen, und die also auch um denselben Feh-

ler d A zu klein seyn wird. Aus dieser Rectascension α, und der scheinbaren Schiefe e der Ecliptik findet man die Poldistanz p der Sonne durch die Gleichung

$$\text{Cotg}\, p = \text{Sin}\, \alpha\, \text{tg}\, e.$$

Ist aber ψ die Äquatorhöhe, so findet man aus dem so eben bestimmten p auch die Zenithdistanz z der Sonne durch die Gleichung

$$z = p - \psi.$$

Sind aber, wie wir voraussetzen wollen, die Grössen p und ψ nicht ganz genau bekannt, und sind die wahren Werthe derselben $p + dp$ und $\psi + d\psi$, so hat man eigentlich

$$z = p + dp - \psi - d\psi.$$

Allein die vorhergehende Gleichung $\text{Cotg}\, p = \text{Sin}\, \alpha\, \text{tg}\, e$ gibt

$$\frac{-dp}{\text{Sin}^2 p} = d\alpha\, \text{Cos}\, \alpha\, \text{tg}\, e + \frac{de\, \text{Sin}\, \alpha}{\text{Cos}^2 e}, \text{ oder}$$

da, wie gesagt, $d\alpha = dA$ ist,

$$-dp = \frac{dA\, \text{Sin}\, 2p}{2\, \text{tg}\, \alpha} + \frac{de\, \text{Sin}\, 2p}{\text{Sin}\, 2e},$$

wodurch also der vorhergehende Ausdruck von z in den folgenden übergeht

$$z = p - \psi - d\psi - \frac{dA\, \text{Sin}\, 2p}{2\, \text{tg}\, \alpha} - de\, \frac{\text{Sin}\, 2p}{\text{Sin}\, 2e}.$$

Diese Zenithdistanz z ist also aus den Beobachtungen an dem Mittagsrohre durch Rechnung abgeleitet worden. Allein an demselben Tage wurde auch zweytens die unmittelbare Zenithdistanz Z der Sonne durch Höhenbeobachtung an dem Kreise gefunden, und da $Z = z$ seyn muss, wenn sonst die Beobachtungen richtig sind, so hat man

$$o = Z - (p - \psi) + d\psi + \frac{dA\, \text{Sin}\, 2p}{2\, \text{tg}\, \alpha} + de\, \frac{\text{Sin}\, 2p}{\text{Sin}\, 2e},$$

und diess ist die Bedingungsgleichung, deren man so viele erhält, als man Tage hat, an welchen die Sonne an beyden Instrumenten beobachtet worden ist, und aus welchen man dann durch die Methode der kleinsten Quadrate die Grössen $d\psi$, de, und den gesuchten Fehler d A der Rectascension, also auch die wahre Rectascension aller beobachteten Sterne ableiten wird.

6. §. Da uns eine umständliche Auseinandersetzung dieser Methode hier zu weit führen würde, so wollen wir nur das Nothwendigste davon ohne Beweise kurz zusammenstellen.

I. Es sey aus einer Anzahl von Beobachtungen die Correction x einer schon nahe bekannten Grösse zu bestimmen, von welcher die unmittelbar durch die Beobachtungen gegebene Grösse eine Function ist, deren Werth sich von einer Beobachtung zur andern ändert. A sey der durch Rechnung gefundene genäherte Werth dieser Function, welcher der ersten Beobachtung entspricht, $A + ax$ der verbesserte Werth derselben, wobey vorausgesetzt wird, dass die gesuchte Correction x so klein sey, dass man die höheren Potenzen derselben vernachlässigen könne; B sey der durch die Beobachtung gegebene Werth derselben Function, und der Unterschied $B - A$ zwischen dem durch Beobachtung und dem durch Rechnung gefundenen Werthe sey $= \delta$. Für die zweyte Beobachtung werden dieselben Grössen durch A_1, a_1, B_1, δ_1 bezeichnet, für die dritte durch A_2, a_2, B_2, δ_2 u. s. w., überhaupt für die $(n+1)$ te durch A_n, a_n, B_n, δ_n.

Werden die Beobachtungen als fehlerfrey vorausgesetzt, so erhält man aus der ersten Beobachtung die Gleichung

$$B = A + a\,x, \text{ oder } o = a\,x - \delta,$$

und eben so aus der zweyten

$$B_1 = A_1 + a_1 x, \text{ oder } o = a_1 x - \delta_1,$$

aus der dritten

$$B_2 = A_2 + a_2 x, \text{ oder } o = a_2 x - \delta_2$$

und so weiter, wo die Grössen A, B, A_1, B_1 u. s. w., oder δ, δ_1 u. s. w., so wie die Factoren a, a_1 u. s. w. bekannt sind. Jede dieser Gleichungen gibt die gesuchte Correction x; aber wegen der Unvollkommenheit der Beobachtungen werden die so erhaltenen Werthe von x nicht identisch seyn. Es kommt nun darauf an, den wahrscheinlichsten Werth von x zu finden.

Bezeichnen ε, ε_1, $\varepsilon_2 \ldots . \varepsilon_n$ u. s. w. die unbekannten Fehler der ersten, zweyten, dritten....$(n+1)$ten u. s. w. Beobachtung, so ist eigentlich

$$B + \varepsilon = A + a\,x, \text{ oder } \varepsilon = a\,x - \delta,$$

$$B_1 + \varepsilon_1 = A_1 + a_1 x, \text{ oder } \varepsilon_1 = a_1 x + \delta_1 \text{ u. s. w.}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit desselben Fehlers bey allen Beobachtungen gleich gross sey, und dass zugleich die positiven und negativen Fehler gleich wahrscheinlich seyen, lässt sich durch die Wahrscheinlichkeits-Theorie beweisen, dass man den von den Beobachtungsfehlern unabhängigsten Werth von x erhält, wenn man setzt

$$o = x \Sigma a^2_n - \Sigma a_n \delta_n, \text{ oder}$$

$$x = \frac{\Sigma a_n \delta_n}{\Sigma a^2_n} \ldots\ldots (A),$$

$$\text{wo } \Sigma a^2_n = a^2_1 + a^2 + a^2_2 + \ldots\ldots,$$

$$\text{und } \Sigma a_n \delta_n = a\delta + a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + \ldots\ldots \text{ ist.}$$

Bestimmt man x so, dass die Summe der Quadrate der Fehler der Beobachtungen ein Minimum, oder dass

$$\frac{d.\Sigma \varepsilon^2_n}{dx} = o$$

wird, so hat man, da

$$\varepsilon^2_n = (a_n x - \delta_n)^2 \text{ ist,}$$

$$\Sigma (a_n x - \delta_n) a_n = o, \text{ oder}$$

$$x \Sigma a^2_n - \Sigma a_n \delta_n = o,$$

welches wieder die vorige Gleichung ist. Desswegen heisst dieses Verfahren die Methode der kleinsten Quadrate.

II. Hat man den Werth von x auf die angegebene vortheilhafteste Art bestimmt, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass der in Beziehung auf diesen Werth zu befürchtende Fehler zwischen den Grenzen $\pm u$ liege, ausgedrückt durch

$$\frac{\sqrt{\Sigma a^2_n}}{h\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{u^2 \Sigma a^2_n}{4h^2}} du \ldots\ldots (B),$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, $\pi = 3.1415926..$, und das Integral von $u = o$ anzunehmen ist. Setzt man

$$u = \frac{2hr}{\sqrt{\Sigma a^2_n}},$$

so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen

$$\pm \frac{2hr}{\sqrt{\Sigma a^2_n}} \text{ falle,}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} .dr \ldots\ldots (C),$$

und der mittlere zu befürchtende Fehler, in dem Sinne, in welchem Laplace in seiner Théorie analytique des Probab.,

Livre II. Chap. IV., diesen Ausdruck gebraucht, d. h. die Summe der Producte jedes Fehlers in seine Wahrscheinlichkeit, ist

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\circ}^{\infty} u\, e^{-r^2}\,.\,dr=\pm\frac{2\,h}{\sqrt{\pi\,\Sigma\, a^2_n}}\int_{\circ}^{\infty} r\, e^{-r^2}.dr,$$

d. h. $=\pm\dfrac{h}{\sqrt{\pi\,\Sigma\, a^2_n}}$ . . . . . . (D).

In diesen Ausdrücken hängt der Factor h eigentlich von dem Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Fehler jeder Beobachtung ab, welches gewöhnlich unbekannt ist. Wird nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen Δ und $\Delta+d\Delta$ falle, durch $\varphi\Delta.d\Delta$ ausgedrückt, so ist

$$h^2=\tfrac{1}{2}\int\Delta^2\,\varphi\Delta.d\Delta,$$

das Integral zwischen den Grenzen der möglichen Fehler einer Beobachtung genommen. Man kann aber auch h aus den Beobachtungen selbst bestimmen, vorausgesetzt, dass diese zahlreich sind. Es ist nämlich nahe

$$2\,s\,h^2=\Sigma\,\varepsilon^2_n \text{ . . . . . . (E)},$$

wo s die Anzahl der Beobachtungen, und ε_n den Werth bezeichnet, den $a_n x-\delta_n$ erhält, wenn man darin für x seinen Werth aus der Gleichung (A) setzt; demnach ist

$$h^2=\frac{\Sigma\,\varepsilon^2_n}{2\,s}=\frac{\Sigma\, a^2_n\,\Sigma\,\delta^2_n-(\Sigma\, a_n\,\delta_n)^2}{2\,s\,\Sigma\, a^2_n},$$

und der mittlere zu befürchtende Fehler ist

$$=\pm\sqrt{\frac{\Sigma\,\varepsilon^2_n}{2\,s\,\pi}}\,.\,\frac{1}{\sqrt{\Sigma\, a^2_n}}=\pm\frac{\sqrt{\Sigma\, a^2_n\,\Sigma\,\delta^2_n-(\Sigma\, a_n\,\delta_n)^2}}{\Sigma\, a^2_n\sqrt{2\,s\,\pi}}.$$

Wenn man in dem Ausdrucke (B) setzt

$$e^{-P u^2} \text{ für } e^{-\frac{\Sigma\, a^2_n}{4\,h^2}u^2},$$

so ist P das, was L a p l a c e das Gewicht des Werthes von x nennt. Dieses Gewicht ist also

$$P=\frac{\Sigma\, a^2_n}{4\,h^2}=\frac{s\,\Sigma\, a^2_n}{2\,\Sigma\,\varepsilon^2_n} \text{ . . . . . . (F)},$$

mithin desto grösser, je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist, und je kleiner $\Sigma\varepsilon^2_n$ ist, d. h. je genauer die Beob-

achtungen sind, endlich je grösser die Factoren a, a_1, a_2 und so weiter sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen den Grenzen $\pm u$ liege, ist

$$= 2\sqrt{\frac{P}{\pi}}\int e^{-P u^2} du \ldots\ldots (G),$$

das Integral wieder von $u = o$ an genommen.

Oder die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen $\pm \frac{r}{\sqrt{P}}$ falle, ist

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2} dr \ldots\ldots (H);$$

bey derselben Wahrscheinlichkeit sind also die Fehler den Quadratwurzeln der Gewichte umgekehrt proportional.

Das Integral $\int_o^r e^{-r^2} dr$ lässt sich für kleine Werthe von r näherungsweise durch folgende Reihen ausdrücken:

$$r - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{r^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{r^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{r^9}{9} - \ldots,$$

$$\text{oder } r.e^{-r^2}\left(1 + \frac{2r^2}{1.3} + \frac{(2r^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2r^2)^3}{1.3.5.7} + \ldots\right).$$

Für grössere Werthe von r kann man setzen, da

$$\int_o^\infty e^{-r^2} dr = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ ist,}$$

$$\int_o^r e^{-r^2} dr = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_r^\infty e^{-r^2} dr$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-r^2}}{2r}.R,$$

$$\text{wo } R = 1 - \frac{1}{2r^2} + \frac{1.3}{2^2 r^4} - \frac{1.3.5}{2^3 r^6} + \ldots,$$

$$\text{oder } = \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \cfrac{4q}{1 + \ldots}}}}}$$

ist, wenn $q = \frac{1}{2r^2}$ gesetzt wird.

Die Brüche, zwischen deren je zwey auf einander folgenden der Werth dieses Kettenbruches enthalten ist, sind

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1+q}, \frac{1+5q}{1+6q+3q^2}, \frac{1+9q+8q^2}{1+10q+15q^2} \text{ u. s. w.}$$

Der Ausdruck $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-r^2} dr$ wird $= \frac{1}{2}$ für

$$r = 0.4769363,$$

also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen den Grenzen $\pm u$ liege, $= \frac{1}{2}$, oder der Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles gleich für

$$u = \frac{0.4769363}{\sqrt{P}} \; \ldots\ldots (K), \text{ oder für}$$

$$u = 0.4769363\sqrt{\frac{2\Sigma\varepsilon^2_n}{s\Sigma a^2_n}} = 0.6744897\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2_n}{s\Sigma a^2_n}} \ldots\ldots (L);$$

diesen Werth von u wollen wir den wahrscheinlichen Fehler des Resultates nennen, und durch ρ bezeichnen.

Für $r = 1$ wird $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-r^2} dr = 0.8427008$, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen $\pm\frac{1}{\sqrt{P}}$ falle,

$$= 0.8427008.$$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen den Grenzen $\pm u$ liege,

$$= \frac{6}{10} \text{ für } u = \frac{0.5951161}{\sqrt{P}} = 1.247790\,\rho,$$

$$= \frac{7}{10} \text{ für } u = \frac{0.7328691}{\sqrt{P}} = 1.536618\,\rho,$$

$$= \frac{8}{10} \text{ für } u = \frac{0.9061939}{\sqrt{P}} = 1.900032\,\rho,$$

$$= \frac{9}{10} \text{ für } u = \frac{1.1630872}{\sqrt{P}} = 2.438664\,\rho,$$

$$= \frac{99}{100} \text{ für } u = \frac{1.8213864}{\sqrt{P}} = 3.818930\,\rho,$$

$$= \frac{999}{1000} \text{ für } u = \frac{2.3276754}{\sqrt{P}} = 4.880475\,\rho, \text{ u. s. w.}$$

Für $u = \infty$ ist sie $= 1$, d. h. die Gewissheit.

Der mittlere zu befürchtende Fehler in dem obigen Sinne ist

$$= \pm\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{P}} \ldots\ldots (M).$$

Hat man eine grosse Anzahl von Beobachtungen in mehrere Gruppen getheilt, und für den Werth der gesuchten Grösse die partiellen Resultate x, x', x'' u. s. w.,
mit den Gewichten P, P', P'' u. s. w.
erhalten, so ist das Resultat aus der Gesammtheit der Beobachtungen

$$X = \frac{xP + x'P' + x''P'' + \ldots}{P + P' + P'' + \ldots} \ldots\ldots (N),$$

und das Gewicht desselben

$$= P + P' + P'' + \ldots\ldots$$

Man bemerkt hier die Analogie mit der Theorie des Schwerpunctes.

Setzt man den Grad der Genauigkeit mehrerer Bestimmungen den gleich wahrscheinlichen Fehlern derselben umgekehrt proportional, so ist der Grad der Genauigkeit der Quadratwurzel des Gewichtes proportional. Wird also bey den partiellen Resultaten $x, x', x'' \ldots\ldots$
der Grad der Genauigkeit respective durch $c, c, c'' \ldots\ldots$
ausgedrückt, so ist das Endresultat

$$X = \frac{c^2 x + c'^2 x' + c''^2 x'' + \ldots}{c^2 + c'^2 + c''^2 + \ldots} \ldots\ldots (O),$$

und die Präcision desselben

$$= \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2 + \ldots}$$

Is das Gewicht P, oder die Präcision c für alle partielle Resultate gleich, so ist das Endresultat

$$= \frac{x + x' + x'' + \ldots}{N},$$

(wo N die Anzahl der partiellen Resultate bezeichnet), das heisst, das arithmetische Mittel aus den partiellen Resultaten, und das Gewicht desselben ist $= P.N$, also der Anzahl N der partiellen Resultate proportional.

Die Präcision desselben ist $= c\sqrt{N}$, also der Quadratwurzel von N proportional; folglich ist dann der zu befürchtende Fehler bey gleicher Wahrscheinlichkeit der Quadratwurzel von N umgekehrt proportional.

Ist der Factor a in Nro. I. für alle Beobachtungen derselbe, so ist das vortheilhafteste Resultat (nach A)

$$x = \frac{\Sigma \delta_n}{a \cdot s},$$

das arithmetische Mittel aus den Resultaten der einzelnen Beobachtungen. Die Grenzen des zu befürchtenden Fehlers mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2} dr$ sind

$$\pm u = \pm \frac{2 r h}{a\sqrt{s}} \text{ (nach C)}$$

$$= \pm \frac{r\sqrt{2 \Sigma \varepsilon^2_n}}{a \cdot s} \text{ (nach E)},$$

wo $\Sigma \varepsilon^2_n$ die Summe der Quadrate der Abweichungen der einzelnen Resultate vom Mittel bezeichnet.

Diese Wahrscheinlichkeit wird $= \frac{1}{2}$ für

$$u = \frac{0.67449\sqrt{\Sigma \varepsilon^2_n}}{a \cdot s} \text{ (nach L)}.$$

Das Gewicht P ist hier

$$= \frac{a^2 s^2}{2 \Sigma \varepsilon^2_n} \text{ (nach F) u. s. w.}$$

Das hier vom arithmetischen Mittel Gesagte gilt auch dann, wenn die zu bestimmende Grösse durch die Beobachtungen unmittelbar gegeben ist; in diesem Falle bezeichnen δ, δ_1, δ_2 u. s. w. die durch die erste, zweyte, dritte u. s. w. Beobachtung gegebenen Werthe dieser Grösse, und a ist $= 1$.

III. Wenn die Voraussetzung, dass gleiche positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich seyen, nicht gilt, so ist der wahrscheinlichste Werth der gesuchten Grösse

$$x = \frac{\Sigma a_n \delta_n}{\Sigma a^2_n} + \frac{k \Sigma a_n}{\Sigma a^2_n} \dots\dots (P),$$

wo $x = \int \Delta \varphi \Delta . d\Delta$ ist, das Integral zwischen den Grenzen der möglichen Fehler einer Beobachtung genommen; (sind die positiven und negativen Fehler gleich wahrscheinlich, so ist dieses Integral $= 0$). Hier wird also $\Sigma(\varepsilon_n - k)^2$ zu einem Minimum gemacht.

Die Grenzen des in Beziehung auf diesen Werth von x zu befürchtenden Fehlers mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2}\, dr$$

sind wieder

$$\pm \frac{2rh}{\sqrt{\Sigma a_n^2}} \text{ (wie in C)},$$

wo $h^2 = \frac{1}{2}(\int \Delta^2 \varphi\Delta . d\Delta - k^2)$ ist.

Der Werth von k hängt, wie man sieht, wie der von h, von dem unbekannten Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler ab. Übrigens lässt er sich, wie Poisson (in der Connoiss. des tems pour 1827 p. 298) gezeigt hat, näherungsweise aus den Beobachtungen selbst bestimmen, wenn nicht die Coefficienten a, a_1, a_2 u. s. w. einander gleich oder nur wenig von einander verschieden sind. Bezeichnet man nämlich die Summe der Quadrate der Differenzen je zweyer von ihnen durch D^2, so ist

$$k \text{ nahe} = \frac{\Sigma a_n \Sigma a_n \delta_n - \Sigma a_n^2 \Sigma \delta_n}{D^2} \ldots\ldots (Q),$$

und es ist eine Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2}\, dr$$

vorhanden, dass der in Beziehung auf diesen Werth von k zu befürchtende Fehler zwischen den Grenzen

$$\pm \frac{2rh\sqrt{\Sigma a_n^2}}{D} \text{ liege.}$$

Um dann den Werth von h^2 zu bestimmen, hat man nahe

$$h^2 + \tfrac{1}{2}k^2 = \frac{1}{2s}\Sigma \varepsilon_n^2 = \frac{1}{2s}\Sigma(a_n x - \delta_n)^2,$$

woraus folgt, wenn man für x seinen Werth aus der Gleichung (P) setzt

$$h^2 = \frac{\Sigma a_n^2 \Sigma \delta_n^2 - (\Sigma a_n \delta_n)^2 - D^2 k^2}{2s\Sigma a_n^2} \ldots\ldots (R).$$

Sind die Beobachtungen von verschiedener Güte, so werden die Grössen k und h nicht für alle denselben Werth haben; bezeichnet man allgemein ihre Werthe für die

$(n+1)$te Beobachtung durch k_n und h_n, so ist der wahrscheinlichste Werth der gesuchten Grösse

$$x = \frac{\Sigma \frac{a_n \delta_n}{h^2_n}}{\Sigma \frac{a^2_n}{h^2_n}} + \frac{\Sigma \frac{a_n k_n}{h^2_n}}{\Sigma \frac{a^2_n}{h^2_n}} \ldots\ldots (S),$$

und die Grenzen des zu befürchtenden Fehlers mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr \text{ sind}$$

$$\pm \frac{2r}{\sqrt{\Sigma \frac{a^2_n}{h^2_n}}} \ldots\ldots (T).$$

IV. Nun sey die durch die Beobachtungen gegebene Grösse eine Function mehrerer schon beynahe bekannter Grössen, deren Correctionen $x, y, z \ldots$ gesucht werden, wobey wieder vorausgesetzt wird, dass die Function in Beziehung auf diese Correctionen lineär sey. Haben A, B, δ, a u. s. w. wieder dieselbe Bedeutung, wie in Nro. I., und sind $b, c \ldots, b_1, c_1 \ldots$ u. s. w. die Factoren von $y, z \ldots$, die den durch $a, a_1 \ldots$ bezeichneten Factoren von x analog sind, so erhält man, ohne Rücksicht auf die Beobachtungsfehler, aus der ersten Beobachtung die Gleichung

$$B = A + ax + by + cz + \ldots\ldots,$$

$$\text{oder } o = -\delta + ax + by + cz + \ldots\ldots,$$

und eben so aus der zweyten

$$o = -\delta_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

Hat man solcher Gleichungen so viele, als unbekannte Grössen $x, y, z \ldots$ sind, so lassen sich daraus die Werthe dieser Grössen durch Elimination bestimmen. Ist aber die Anzahl der Beobachtungen, und daher auch die Anzahl dieser Gleichungen, grösser als die Anzahl der unbekannten Grössen, so kommt es darauf an, die wahrscheinlichsten Werthe von $x, y, z \ldots$ zu finden. Unter denselben Voraussetzungen, die in Nro. I. gemacht worden sind, besteht nun wieder die vortheilhafteste Methode zur Bestimmung der gesuchten Correctionen darin, dass man die Summe der Quadrate der Fehler der Beobachtungen zu einem Minimum

macht. Es ist aber, wenn wieder ε_n den Fehler der $(n+1)$ten Beobachtung bezeichnet,

$$\varepsilon_n = -\delta_n + a_n x + b_n y + c_n z + \ldots\ldots;$$

setzt man also $\left(\frac{d.\Sigma \varepsilon^2_n}{dx}\right) = o$, so erhält man

$$\Sigma(-\delta_n + a_n x + b_n y + c_n z \ldots\ldots) a_n = o, \text{ oder}$$

$$o = -\Sigma a_n \delta_n + x \Sigma a^2_n + y \Sigma a_n b_n + z \Sigma a_n c_n + \ldots\ldots;$$

$$\left(\frac{d.\Sigma \varepsilon^2_n}{dy}\right) = o \text{ gibt eben so}$$

$$\Sigma(-\delta_n + a_n x + b_n y + c_n z + \ldots\ldots) b_n = o, \text{ oder}$$

$$o = -\Sigma b_n \delta_n + x \Sigma b_n a_n + y \Sigma b^2_n + z \Sigma b_n c_n + \ldots\ldots;$$

$$\left(\frac{d.\Sigma \varepsilon^2_n}{dz}\right) = o \text{ gibt}$$

$$o = -\Sigma c_n \delta_n + x \Sigma c_n a_n + y \Sigma c_n b_n + z \Sigma c_n^2 + \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

Man erhält solcher Gleichungen so viele, als unbekannte Grössen sind, und aus ihnen wird man die wahrscheinlichsten Werthe von $x, y, z \ldots$ durch Elimination finden.

Für zwey zu bestimmende Elemente hat man

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\Sigma b^2_n \Sigma a_n \delta_n - \Sigma a_n b_n \Sigma b_n \delta_n}{\Sigma a^2_n \Sigma b^2_n - (\Sigma a_n b_n)^2} \\ y = \dfrac{\Sigma a^2_n \Sigma b_n \delta_n - \Sigma a_n b_n \Sigma a_n \delta_n}{\Sigma a^2_n \Sigma b^2_n - (\Sigma a_n b_n)^2} \end{array}\right\} \ldots\ldots (U).$$

Das Gewicht P ist dann

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } x = \dfrac{s}{2\Sigma \varepsilon^2_n} \cdot \dfrac{\Sigma a^2_n \Sigma b^2_n - (\Sigma a_n b_n)^2}{\Sigma b^2_n} \\ \text{für } y = \dfrac{s}{2\Sigma \varepsilon^2_n} \cdot \dfrac{\Sigma a^2_n \Sigma b^2_n - (\Sigma a_n b_n)^2}{\Sigma a^2_n} \end{array}\right\} \ldots\ldots (V),$$

und daher der wahrscheinliche Fehler (nach K)

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } x = 0.67449 \sqrt{\dfrac{\Sigma \varepsilon^2_n}{s} \cdot \dfrac{\Sigma b^2_n}{\Sigma a^2_n \Sigma b^2_n - (\Sigma a_n b_n)^2}} \\ \text{für } y = 0.67449 \sqrt{\dfrac{\Sigma \varepsilon^2_n}{s} \cdot \dfrac{\Sigma a^2_n}{\Sigma a^2_n \Sigma b^2_n - (\Sigma a_n b_n)^2}} \end{array}\right\} \ldots\ldots (W),$$

wo ε_n den Werth von $a_n x + b_n y - \delta_n$ bezeichnet, nachdem man für x und y ihre wahrscheinlichsten Werthe gesetzt hat.

Sind drey Elemente zu bestimmen, so ist das Gewicht P

$$\text{für } x = \frac{s}{2\,\Sigma\,\varepsilon^2_n}\cdot\frac{M}{N}\cdots\cdots(X.),$$

wo $M = \Sigma a^2_n \Sigma b^2_n \Sigma c^2_n - \Sigma a^2_n (\Sigma a_n b_n)^2 - \Sigma b^2_n (\Sigma a_n c_n)^2$

$$-\Sigma c^2_n (\Sigma a_n b_n)^2 + 2\,\Sigma a_n b_n \Sigma a_n c_n \Sigma b_n c_n,$$

$$\text{und } N = \Sigma b^2_n c^2_n - (\Sigma b_n c_n)^2,$$

und wo $\varepsilon_n = a_n x + b_n y + c_n z - \delta_n$ ist, wenn man für x, y, z ihre durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Werthe setzt.

Wenn man in dem Ausdrucke des Gewichtes von x a statt b, und b statt a setzt, so erhält man das Gewicht von y; setzt man a statt c, und c statt a, so erhält man das Gewicht von z.

Eine allgemeine Methode zur Bestimmung des Gewichtes bey einer grösseren Anzahl von gesuchten Grössen hat Laplace in dem ersten Supplement à la Théorie analytique des Probabilités gegeben.

Hat man P gefunden, so gelten allgemein die Gleichungen (G), (H), (K), (M) u. s. w. Bey derselben Anzahl von Beobachtungen ist P desto kleiner, je grösser die Anzahl der zu bestimmenden Elemente ist.

Beyspiel. Aus 129 Beobachtungen wurden zur Bestimmung von zwey Elementen nach der Methode der kleinsten Quadrate folgende Endgleichungen gefunden:

$$4172.95 = 48442\,x + 48020\,y,$$
$$-171455.2 = 48020\,x + 57725227\,y,$$
$$\text{und } \Sigma\,\varepsilon^2_n = 31096.$$

Hier ist also

$s = 129$, $\Sigma a_n \delta_n = 4172.95$ $\quad\Sigma b_n \delta_n = -171455.2$,
$\Sigma a^2_n = 48442$ $\quad\Sigma b^2_n = 57725227$,
$\Sigma a_n b_n = 48020$,

und man findet

$$x = 0.08916,$$
$$y = -0.00305, \text{ und (nach V).}$$

$$P \text{ für } x = \frac{s}{2\,\Sigma\,\varepsilon^2_n}\left(\Sigma a^2_n - \frac{(\Sigma a_n b_n)^2}{\Sigma b_n^2}\right), \quad \log P = 2.0013595$$

$$P \text{ für } y = \frac{s}{2\,\Sigma\,\varepsilon^2_n}\left(\Sigma b^2_n - \frac{(\Sigma a_n b_n)^2}{\Sigma a^2_n}\right), \quad \log P = 5.0778624.$$

Daraus folgt (nach M) mittlerer zu befürchtender Fehler

für $x = \pm \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \pm 0.02817$, und für $y = \pm 0.0008156$,

(nach K) wahrscheinlicher Fehler

für $x = \pm \frac{0.476936}{\sqrt{P}} = \pm 0.04762$, und für $y = \pm 0.0013789$.

Setzt man $r = \frac{\sqrt{P}}{100}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler von y zwischen den Grenzen $\pm \frac{1}{100}$ liege (nach H).

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-r^2} dr = 1 - \frac{e^{-r^2}}{r\sqrt{\pi}} \cdot R = 1 - 0.000001,$$

$$\text{oder nahe} = \frac{1000000}{1000001},$$

oder es ist eine Million gegen 1 zu wetten, dass der Fehler von y kleiner als $\frac{1}{100}$ sey.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler von x zwischen $\pm \frac{1}{4}$ falle,

$$\text{ist} = \frac{2508}{2509},$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen $\pm \frac{1}{5}$ falle,

$$\text{ist} = \frac{215.6}{216.6}.$$

V. Gauss hat in der Theoria motus corporum coelestium Lib. II. Sect. III., und in der Zeitschrift für Astron. Band I. Nro. XII ein bestimmtes Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler angenommen, indem er

$$\varphi \Delta = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 \Delta^2} \quad \ldots\ldots (Y)$$

voraussetzte, und hat unter dieser Voraussetzung das Verhältniss der Präcision der nach der Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Resultate zu der Präcision der einzelnen Beobachtungen, und die Genauigkeit der Beobachtungen selbst, oder den wahrscheinlichen Fehler jeder Beobachtung bestimmt. Auf eine andere Art hat er diese Gegenstände in seiner Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae behandelt.

Nimmt man das angeführte Gesetz (Y) der Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler an, so ist der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung

$$v = \frac{0.4769363}{H},$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen die Grenzen $\pm \frac{0.4769}{H}$ falle, ist $= \frac{1}{2}$, oder der Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles gleich. Es kommt nun darauf an, den Werth von H zu bestimmen. Bezeichnet $\Sigma \varepsilon^2_n$ die Summe der Quadrate der Fehler, die bey s wirklich gemachten Beobachtungen begangen worden sind (diese Fehler sind, streng genommen, nicht bekannt; in der Praxis setzt man dafür die Differenzen der durch die einzelnen Beobachtungen gegebenen Werthe von den aus der Gesammtheit der Beobachtungen nach der vortheilhaftesten Methode durch Rechnung gefundenen), so ist der wahrscheinlichste Werth von H

$$= \sqrt{\frac{s}{2 \Sigma \varepsilon^2_n}},$$

also der wahrscheinlichste Werth von v, den wir durch V bezeichnen wollen,

$$= 0.6744897 \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon^2_n}{s}} \ldots\ldots (Z).$$

Die wahrscheinliche Unsicherheit dieses Werthes von v ist $= \pm V . \frac{0.476936}{\sqrt{s}} \ldots\ldots (AA)$,

oder die wahrscheinlichen Grenzen des wahren Werthes von v sind $V \left(1 \mp \frac{0.476936}{\sqrt{s}}\right)$,

d. h. es ist 1 gegen 1 zu wetten, dass der wahre Werth von v zwischen

$$0.67449 \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon^2_n}{s}} \left(1 - \frac{0.4769}{\sqrt{s}}\right),$$

$$\text{und } 0.67449 \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon^2_n}{s}} \left(1 + \frac{0.4769}{\sqrt{s}}\right) \text{ falle.}$$

Will man ein etwas weniger genaues, aber bequemeres Verfahren anwenden, wobey man nicht die Summe der

Quadrate von s Beobachtungfehlern, sondern nur die Summe $\Sigma \varepsilon_n$ dieser Fehler selbst, alle positiv genommen, zu kennen braucht, so kann man setzen

$$V = 0.8453473 \frac{\Sigma \varepsilon_n}{s};$$

die wahrscheinlichen Grenzen des wahren Werthes von v sind dann

$$= V \left(1 \mp \frac{0.5095841}{\sqrt{s}} \right).$$

Das Verhältniss der Genauigkeit der durch die Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Resultate zu der Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen lässt sich (nach Theoria mot. corp. coel. p. 219, Theor. comb. obs. p. 28 sq.) so bestimmen: Es sey

$$X = -\Sigma a_n \delta_n + x \Sigma a^2_n + y \Sigma a_n b_n + z \Sigma a_n c_n + \ldots,$$
$$Y = -\Sigma b_n \delta_n + x \Sigma b_n a_n + y \Sigma b^2_n + z \Sigma b_n c_n + \ldots,$$
$$Z = -\Sigma c_n \delta_n + x \Sigma c_n a_n + y \Sigma c_n b_n + z \Sigma c^2_n + \ldots$$

und so weiter.

Da solcher Gleichungen so viele sind, als unbekannte Grössen x, y, z...., so kann man aus ihnen durch Elimination die Werthe von x, y, z.... durch X, Y, Z.... ausgedrückt finden, wodurch man andere Gleichungen erhält von der Form:

$$x = L + A\,X + B\,Y + C\,Z + \ldots,$$
$$y = L' + A'\,X + B'\,Y + C'\,Z + \ldots,$$
$$z = L'' + A''\,X + B''\,Y + C''\,Z + \ldots \text{ u. s. w.};$$

dann sind (nach Nro. IV, wo X, Y, Z = o gesetzt wurden) die wahrscheinlichsten Werthe von x, y, z....

$$x = L$$
$$y = L'$$
$$z = L'' \text{ u. s. w.};$$

und die Präcision dieser Werthe, die der einzelnen Beobachtungen zur Einheit angenommen, ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } x = \frac{1}{\sqrt{A}} \\ \text{für } y = \frac{1}{\sqrt{B'}} \\ \text{für } z = \frac{1}{\sqrt{C''}} \end{array}\right\} \ldots\ldots (BB) \text{ u. s. w.}$$

Wenden wir dieses auf unser obiges Beyspiel an, so haben wir

$$X = -4172.95 + 48442x + 48020y,$$
$$Y = 171455.2 + 48020x + 5772522y.$$

Daraus findet man durch Elimination

$$x = 0.08916 + 0.00002066X - 0.0000000172Y,$$
$$y = -0.00305 - 0.0000000172X + 0.0000000173Y;$$

daher den wahrscheinlichsten Werth

$$\text{von } x = 0.08916$$
$$\text{von } y = 0.00305,$$

und die Präcision dieser Werthe, die der einzelnen Beobachtungen $= 1$ gesetzt,

$$\text{für } x = \sqrt{\frac{1}{0.00002066}} = 220.0,$$
$$\text{für } y = \sqrt{\frac{1}{0.0000000173}} = 7594.7.$$

Der wahrscheinliche Fehler einer jeden Beobachtung ist aber (nach Z)

$$V = 0.67449\sqrt{\frac{31096}{129}} = 10.472,$$

folglich der wahrscheinliche Fehler

$$\left.\begin{array}{l}\text{von } x = \dfrac{V}{220} = 0.0476 \\ \text{von } y = \dfrac{V}{7594.7} = 0.001379\end{array}\right\}\text{ wie oben.}$$

Die wahrscheinliche Unsicherheit von V ist (nach A A)

$$= \pm V.\frac{0.476936}{\sqrt{129}} = \pm 0.4397.$$

Ist nur ein Element zu bestimmen, so hat man

$$x = \frac{\Sigma a_n \delta_n}{\Sigma a^2_n} - \frac{X}{\Sigma a^2_n},$$

also ist hier

$$\frac{1}{\sqrt{A}} = \sqrt{\Sigma a^2_n},$$

und der wahrscheinliche Fehler

$$\text{von } x = \frac{V}{\sqrt{\Sigma a^2_n}},$$

$$\text{d. h. (nach Z)} = 0.67449\sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon^2_n}{s\,\Sigma a^2_n}},$$

übereinstimmend mit Nro. II, Gleichung (L).

Sind zwey Elemente zu bestimmen, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{A}} = \sqrt{\frac{\Sigma a^2_n \Sigma b^2_n - (\Sigma a_n b_n)^2}{\Sigma b^2_n}}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{\sqrt{B'}} = \sqrt{\frac{\Sigma a^2_n \Sigma b^2_n - (\Sigma a_n b_n)^2}{\Sigma a^2_n}},$$

und der wahrscheinliche Fehler

von $x = V\sqrt{A}$

$$= 0.67449 \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon^2_n}{s} \cdot \frac{\Sigma b^2_n}{\Sigma a^2_n \Sigma b^2_n - (\Sigma a_n b_n)^2}},$$

von $y = V\sqrt{B'}$

$$= 0.67449 \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon^2_n}{s} \cdot \frac{\Sigma a^2_n}{\Sigma a^2_n \Sigma b^2_n - (\Sigma a_n b_n)^2}},$$

übereinstimmend mit Nro. IV (W).

Wie man bey einer grössern Anzahl von gesuchten Grössen die Werthe von A, B', C'' u. s. w. bequem finden könne, hat Gauss in der Theoria comb. obs. p. 40 sqq. gezeigt.

Übrigens ist zu bemerken, dass hier nur zufällige, nicht constante Fehler der Beobachtungen in Betracht kommen.

Hat man aus Beobachtungen von verschiedener Güte, bey denen der Grad der Genauigkeit respective durch die Zahlen H, H_1, H_2.... ausgedrückt wird, Bedingungsgleichungen von der in Nro. IV. angegebenen Form erhalten, so wird man die wahrscheinlichsten Werthe der Grössen x, y, z.... finden, wenn man an die Stelle dieser Bedingungsgleichungen folgende setzt:

$$0 = -H\,\delta + a\,H\,x + b\,H\,y + c\,H\,z + \ldots,$$

$$0 = -H_1\delta_1 + a_1 H_1 x + b_1 H_1 y + c_1 H_1 z + \ldots \text{ u. s. w.},$$

und nun bey diesen letzteren Bedingungsgleichungen das in Nro. IV. gezeigte Verfahren anwendet, oder wenn man $\Sigma H^2_n \varepsilon^2_n$ statt $\Sigma \varepsilon^2_n$ zu einem Minimum macht.

VI. In der Theoria comb. obs. versteht Gauss unter dem mittleren Fehler der Beobachtungen die Grösse m, wenn das Integral $\int \Delta^2 \varphi \Delta . d\Delta$, von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommen, $= m^2$ gesetzt wird. Dieses m^2 ist also das Doppelte von dem, was wir in Nro. II. und III. durch h^2 bezeichnet haben, oder das, was Gauss den mittleren Fehler der Beobachtungen nennt, ist $= h\sqrt{2}$, wenn man die Grösse $k = \int \Delta \varphi \Delta . d\Delta$, die Gauss den constanten Theil des Fehlers nennt, $= 0$ setzt, wie in Nro. I. und II. Die Ge-

nauigkeit einer Beobachtung oder einer Bestimmung setzt Gauss dem mittleren Fehler, das Gewicht derselben dem Quadrat des mittleren Fehlers umgekehrt proportional.

Kennt man eine bedeutende Anzahl zufälliger von einander unabhängiger Fehler, die wirklich vorgekommen sind, so kann man daraus einen genäherten Werth des mittleren zu befürchtenden Fehlers m finden. Bezeichnet nämlich wieder $\Sigma \varepsilon^2_n$ die Summe der Quadrate dieser Fehler, s die Anzahl derselben, so ist nahe

$$m^2 = \frac{\Sigma \varepsilon^2_n}{s}, \ldots\ldots (CC),$$

welche Gleichung mit der Gleichung (E) in Nro. II. identisch ist; und der mittlere bey dieser Bestimmung zu befürchtende Fehler in Beziehung auf das Quadrat m^2 ist

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{s}}, \ldots\ldots (DD),$$

$$\text{wo } n^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^4 \varphi \Delta . d \Delta \text{ ist.}$$

Um die Genauigkeit der Bestimmung von m^2 einiger Massen beurtheilen zu können, wird man eine Hypothese in Betreff der Function $\varphi \Delta$ annehmen dürfen. Nimmt man z. B. die obige Hypothese (Y) an, so ist

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \varphi \Delta . d \Delta = \frac{H}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 e^{-H^2 \Delta^2} d \Delta = \frac{1}{2 H^2},$$

$$\text{und } n^4 = \frac{H}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^4 e^{-H^2 \Delta^2} d \Delta = \frac{3}{4 H^4},$$

$$\text{also } n^4 = 3 m^4,$$

$$\text{folglich } \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{s}} = m^2 \sqrt{\frac{2}{s}} \ldots\ldots (EE).$$

Auch kann man einen genäherten Werth von n^4 aus den Fehlern selbst finden. Ist nämlich $\Sigma \varepsilon^4_n$ die Summe der vierten Potenzen derselben, so ist nahe

$$n^4 = \frac{\Sigma \varepsilon^4_n}{s} \ldots\ldots (FF).$$

Kennt man den mittleren Fehler m einer jeden Beobachtung, so findet man, wenn die Grössen x, y, z ... nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt worden sind, den mittleren zu befürchtenden Fehler (nach BB)

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } x = m\sqrt{A}, \\ \text{für } y = m\sqrt{B'}, \\ \text{für } z = m\sqrt{C''}, \\ \quad\text{u. s. w.}, \end{array}\right\}\ldots\ldots(GG)$$

und die Gewichte der Bestimmungen von $x, y, z \ldots.$ sind $\frac{1}{A}, \frac{1}{B'}, \frac{1}{C''} \ldots.$, das Gewicht einer jeden Beobachtung $= 1$ gesetzt.

In dem obigen Beyspiele ist (nach CC) $m^2 = 241.05$, also der mittlere Fehler der Beobachtungen $m = 15.526$, und der mittlere bey der Bestimmung von m^2 zu befürchtende Fehler ist (nach EE) $= m^2 \sqrt{\frac{2}{129}} = 30.015$.

Nun ist (nach GG) der mittlere Fehler

$$\text{für } x = \frac{15.526}{220} = 0.07057,$$

$$\text{für } y = \frac{15.526}{7594.7} = 0.002044.$$

Setzt man wieder $\varphi\Delta = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2\Delta^2}$, so verhält sich der wahrscheinliche Fehler zum mittlern Fehler

$$= 0.6744897 : 1.$$

In unserem Beyspiele ist also der wahrscheinliche Fehler jeder Beobachtung $= 0.6745 \times 15.526 = 10.472$ wie oben; der wahrscheinliche Fehler

$$\left.\begin{array}{l} \text{von } x = 0.6745 \times 0.0706 \quad = 0.0476 \\ \text{von } y = 0.6745 \times 0.002044 = 0.001379 \end{array}\right\} \text{wie oben.}$$

Sind die Beobachtungen, deren Fehler $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots..$ man kennt, von verschiedener Güte, und ist das Verhältniss der Genauigkeit derselben bekannt, so kann man die mittlern Fehler derselben auf folgende Art finden:

Es sey ε der Fehler einer Beobachtung von der Art, für welche der mittlere zu befürchtende Fehler $= m$ ist; man nehme die Factoren α_1, α_2 u. s. w. den relativen Gewichten der Beobachtungen, zu denen die Fehler ε_1, ε_2 u. s. w. gehören, gleich, das Gewicht der Beobachtung, deren Fehler ε ist, $= 1$ gesetzt; so ist der genäherte Werth von m^2

$$= \frac{\varepsilon^2 + \alpha_1\varepsilon_1^2 + \alpha_2\varepsilon_2^2 + \ldots.}{s}, \ldots..(HH),$$

und der mittlere in Beziehung auf diesen Werth von m^2 zu befürchtende Fehler, unter der Voraussetzung, dass der Werth von n für verschiedene Beobachtungen dem Werth von m proportional sey, (wie es z. B. bey der obigen Hypothese für $\varphi\Delta$ der Fall ist), wieder

$$=\sqrt{\frac{n^4-m^4}{s}} \text{ (wie in DD).}$$

Kennt man m, so kann man leicht auch die mittlern Fehler für die übrigen Beobachtungen finden, da die relative Genauigkeit bekannt ist.

Weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand s. Theor. comb. obs. p. 50 sqq.

§. 6. Zum Beschlusse dieser Gegenstände wollen wir noch sehen, wie man aus der Beobachtung der Sonnenflecken die Lage der Rotationsaxe und die Geschwindigkeit der Umdrehung der Sonne finden kann.

Zu diesem Zwecke bestimmt man zuerst durch Beobachtungen die Differenzen der Rectascension und Poldistanz des Fleckens und des Mittelpunctes der Sonne. Braucht man dazu den Kreismikrometer, und nennt t die Zeit zwischen den äusseren Berührungen der Sonne und des Kreises, und t′ die Zeit zwischen dem Ein- und Austritt des Fleckens, r den Halbmesser der Sonne, und r′ den des Kreises, so wie p die Poldistanz der Sonne, so sucht man die Grössen d und d′ aus

$$d^2=(r+r')^2-\left(\frac{15\,t}{2}\operatorname{Sin} p\right)^2 \text{ und } d'^2=r'^2-\left(\frac{15\,t'}{2}\operatorname{Sin} p\right)^2,$$

so ist $d-d'=dp$ die Differenz der Poldistanzen des Mittelpuncts der Sonne und des Fleckens; die Differenz da der Rectascension dieser beyden Puncte aber ist der halbe Unterschied zwischen der Summe der Ein- und Austrittszeiten der Sonne und der Summe der Ein- und Austrittszeiten des Fleckens. Aus diesen Werthen da und dp findet man die Differenz $d\lambda$ und $d\pi$ jener beyden Puncte in geocentrischer Länge und Distanz vom Pole der Ecliptik durch die Gleichungen (S. 30)

$$d\lambda = da \quad \operatorname{Cos} u \operatorname{Sin} p - dp \operatorname{Sin} u$$
$$d\pi = -da \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin} p - dp \operatorname{Cos} u,$$

wo u der Winkel des Breitenkreises der Sonne mit ihrem Declinationskreise ist, und wo daher (Seite 31) $\text{tg}\, u = -\text{Cos}\, L\, \text{tang}\, e$ ist, wenn L die Länge der Erde, und e die Schiefe der Ecliptik bezeichnet. Man hat daher

$$\text{geoc. Länge des Fleckens } \lambda = 180° + L + d\lambda$$
$$\text{geoc. Poldistanz } \pi = 90 + d\pi.$$

I. Um daraus die heliocentrische Länge l und Poldistanz p des Fleckens abzuleiten, sey R die Entfernung der Erde von dem Mittelpuncte der Sonne und ρ von dem Flecken, und L, P die Länge und Poldistanz der Erde, so ist

$$r\,(\text{Sin}\, p\, \text{Cos}\,(l-N) = R\, \text{Sin}\, P\, \text{Cos}\,(L-N) + \rho\, \text{Sin}\, \pi\, \text{Cos}\,(\lambda - N),$$
$$r\, \text{Sin}\, p\, \text{Sin}\,(l-N) = R\, \text{Sin}\, P\, \text{Sin}\,(L-N) + \rho\, \text{Sin}\, \pi\, \text{Sin}\,(\lambda - N),$$
$$r\, \text{Cos}\, p = \quad = R\, \text{Cos}\, P \quad + \rho\, \text{Cos}\, \pi,$$

wo N eine willkürliche Grösse ist.

Quadrirt und addirt man diese drey Gleichungen, und setzt

$$\text{Cos}\, \psi = \text{Cos}\, P\, \text{Cos}\, \pi + \text{Sin}\, P\, \text{Sin}\, \pi\, \text{Cos}\,(L - \lambda),$$

so erhält man

$$\rho = - R\, \text{Cos}\, \psi + \sqrt{r^2 - R^2\, \text{Sin}^2\, \psi},$$

und ist so ρ gefunden, so geben jene drey Gleichungen auch die Werthe von l und p.

Kürzer wird diese Auflösung, wenn man bedenkt, dass immer sehr nahe $\rho = R$ und $P = 90$ ist. Dann hat man nämlich

$$\text{Sin}\, p\, \text{Cos}\,(l - N) = \frac{R}{r}[\text{Cos}\,(L - N) + \text{Sin}\, \pi\, \text{Cos}\,(\lambda - N)],$$

$$\text{Sin}\, p\, \text{Sin}\,(l - N) = \frac{R}{r}[\text{Sin}\,(L - N) + \text{Sin}\, \pi\, \text{Sin}\,(\lambda - N)],$$

$$\text{Cos}\, p = \frac{R}{r}\, \text{Cos}\, \pi.$$

Ist z. B. $N = \lambda$, so hat man $\text{Cos}\, p = \frac{R}{r}\, \text{Cos}\, \pi$ und

$$\text{Sin}\,(l - \lambda) = \frac{R\, \text{Sin}\,(L - \lambda)}{r\, \text{Sin}\, p.},$$

oder auch für $N = L$,

$$\text{Sin}\,(l - L) = \frac{R\, \text{Sin}\, \pi\, \text{Sin}\,(\lambda - L)}{r\, \text{Sin}\, p},$$

II. Auf diese Weise findet man also aus jeder beobachteten Differenz der Rectascension und Declination des Fleckens seine heliocentrische Länge l und Poldistanz p, und damit die Gleichung

$$x \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} l + y \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} l + z - \operatorname{Cos} p = o,$$

in welcher die drey Grössen x, y und z noch unbekannt sind. Eben so geben noch zwey andere Beobachtungen desselben Fleckens

$$x \operatorname{Sin} p' \operatorname{Cos} l' + y \operatorname{Sin} p' \operatorname{Sin} l' + z - \operatorname{Cos} p' = o \text{ und}$$
$$x \operatorname{Sin} p'' \operatorname{Cos} l'' + y \operatorname{Sin} p'' \operatorname{Sin} l' + z - \operatorname{Cos} p'' = o,$$

und aus diesen drey Gleichungen wird man die Werthe von x, y und z durch Elimination finden. Nennt man dann n die Neigung des Sonneu-Äquators gegen die Ecliptik und k die Länge des aufsteigenden Knoteus des Sonnen-Äquators in der Ecliptik und endlich Π die constante heliocentrische Distanz des Fleckens von dem Pole des Sonnen-Äquators, so ist

$$\operatorname{tg} n = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\operatorname{tg} k = -\frac{x}{y} \text{ und}$$
$$\operatorname{Cos} \Pi = z \operatorname{Cos} n,$$

und dadurch ist die Lage der Rotationsaxe des Fleckens, so wie der Ort desselben auf der Oberfläche der Sonne bestimmt. Ist endlich ϑ die Zeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung, C die Sehne zwischen beyden Orten des Fleckens, d der Halbmesser seines Parallelkreises, m der Winkel am Mittelpuncte des Parallelkreises, den der Flecken zwischen der ersten und dritten Beobachtung beschreibt, und T die Rotationszeit der Sonne, so ist

$$C = r \sqrt{2 (1 - \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} p'' \operatorname{Cos} (l'' - l) \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} p'')},$$
$$d = r \operatorname{Sin} \Pi,$$

$$\text{und } \operatorname{Sin} \frac{m}{2} = \frac{C}{2d} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} p'' \operatorname{Cos} (l'' - l) - \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} p''}{2 \operatorname{Sin}^2 \Pi}}.$$

Dann ist die gesuchte Rotationszeit

$$T = 360^\circ . \frac{\vartheta}{m}.$$

Kennt man so die Werthe von x, y und z, die bloss aus drey Beobachtungen abgeleitet, und also wahrscheinlich noch einer bedeutenden Verbesserung fähig sind, so wird man dann die wahren Werthe derselben $x + dx$, $y + dy$ und $z + dz$ setzen, wodurch man für jede einzelne Beobachtung erhält

$$(x + dx) \text{Sin}\, p \text{Cos}\, l + (y + dy) \text{Sin}\, p \text{Sin}\, l + z + dz - \text{Cos}\, p = 0$$

oder wenn man die bereits bekannte Grösse

$x \text{Sin}\, p \text{Cos}\, l + y \text{Sin}\, p \text{Sin}\, l + z - \text{Cos}\, p$ gleich A setzt,

$$A + dx \text{Sin}\, p \text{Cos}\, l + dy \text{Sin}\, p \text{Sin}\, l + dz = 0$$

welches die gesuchte Bedingungsgleichung dieser Beobachtung ist. Man wird solcher Gleichungen so viele erhalten, als man Beobachtungen hat, und dann aus ihnen durch die so eben gegebene Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von dx, dy und dz bestimmen.

Vorlesung VI.

Bestimmung der Entfernungen der Himmelskörper von der Erde.

1. §. Wenn man die Lage eines der Erde nahen Gestirns gegen die unendlich entfernten Fixsterne aus zwey gegebenen Puncten der Oberfläche der Erde beobachtet, so lässt sich daraus die Entfernung des Gestirns von dem Mittelpuncte der Erde bestimmen.

Sey L (Fig. 9) das Gestirn, B und B' die beyden Beobachter, deren Normalen ZB, Z'B' verlängert den Äquator CA der Erde unter den Winkeln $BbA = \varphi$, $B'b'A = \varphi'$ und die Linie CL unter den Winkeln $B\beta L = y$, $B'\beta' L = y'$ schneiden, wo C der Mittelpunct der Erde ist. Sey $CL = R$, $CB = r$, $CB' = r'$ und $CBb = w$, $CB'b' = w'$ (wo die Grössen r, r', w und w' aus den Gleichungen der S. 91 gefunden werden). Sind nun die beyden beobachteten Zenithdistanzen des Gestirns $LBZ = z$ und $LB'Z' = z'$, so ist $LBC = 180° - (z - w)$ und $LB'C = 180° - (z' - w')$. Ist also $CLB = x$ und $CLB' = x'$, so hat man

$$R = r\frac{\text{Sin}\,(z - w)}{\text{Sin}\,x} = r'\frac{\text{Sin}\,(z' - w')}{\text{Sin}\,x'} \;\ldots\ldots\; (\text{I}).$$

Ist aber $LCA = u$, so ist $z = y + x$ und $\varphi = y + u$, also $x = z - \varphi + u$ und eben so $x' = z' - \varphi' - u$. Die Summe dieser beyden Grössen $x + x'$, die wir m nennen wollen, ist daher $x + x' = m = (z + z') - (\varphi + \varphi')$, also m eine bekannte Grösse. Substituirt man diesen Werth von $x' = m - x$ in den Gleichungen (I), so erhält man

$$\operatorname{Sin} x = \frac{r}{R} \operatorname{Sin}(z - w) \text{ und } \operatorname{Sin}(m - x) = \frac{r'}{R} \operatorname{Sin}(z' - w'),$$

und beyder Gleichungen Division gibt

$$\operatorname{tg} x = \frac{r \operatorname{Sin}(z - u) \operatorname{Sin} m}{r' \operatorname{Sin}(z' - w') + r \operatorname{Sin}(z - w) \operatorname{Cos} m},$$

$$\operatorname{tg} x' = \frac{r' \operatorname{Sin}(z' - w') \operatorname{Sin} m}{r \operatorname{Sin}(z - w) + r' \operatorname{Sin}(z' - w') \operatorname{Cos} m},$$

und dann findet man R durch die Gleichung

$$R = \frac{r \operatorname{Sin}(z - w)}{\operatorname{Sin} x} \text{ oder } R = \frac{r' \operatorname{Sin}(z' - w')}{\operatorname{Sin}(m - x)}.$$

Ist dann ϖ die Horizontalparallaxe des Gestirns für den Äquator und A der Halbmesser des Äquators, so ist

$$\operatorname{Sin} \varpi = \frac{A}{R}$$

oder sehr nahe, da m nur klein ist,

$$\varpi = \frac{A \, . \, m}{r' \operatorname{Sin}(z' - w') + r \operatorname{Sin}(z - w)}.$$

Dieser Ausdruck setzt voraus, dass die Beobachter auf verschiedenen Seiten des Äquators stehen. Sind sie auf derselben Seite, so ist

$$m = x' - x = (z' - z) - (\varphi' - \varphi),$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{r \operatorname{Sin}(z - w) \operatorname{Sin} m}{r' \operatorname{Sin}(z' - w') - r \operatorname{Sin}(z - w) \operatorname{Cos} m} \text{ und}$$

$$\varpi = \frac{A}{R} = \frac{A x}{r \operatorname{Sin}(z - w)} = \frac{A \ m}{r' \operatorname{Sin}(z' - w') - r \operatorname{Sin}(z - w)}.$$

Liegen die beyden Beobachtungsorte nicht genau in demselben Meridian, wie bisher vorausgesetzt wurde, so wird man, da die Beobachtungen nicht mehr gleichzeitig sind, von der Änderung der Declination des Gestirns während der Zeit zwischen beyden Beobachtungen Rechnung tragen. Durch dieses Verfahren hat Lacaille am Vorgebirge der guten Hoffnung mit Lalande in Berlin die Parallaxe des Mondes und des Mars bestimmt.

2. §. Für den Mond kann man, da er der Erde so nahe ist, seine Parallaxe auch aus den Beobachtungen eines und desselben Ortes ableiten. Ist nämlich a und p die wahre Rectascension und Poldistanz des Mondes, und a' die schein-

bare, durch die Parallaxe verminderte Rectascension desselben, A die Sternzeit der Beobachtung, φ die geocentrische Polhöhe (S. 90) und r die Entfernung des Beobachters von dem Mittelpuncte der Erde, der Halbmesser des Äquators als Einheit vorausgesetzt, so ist (S. 97)

$$a - a' = \varpi r \operatorname{Sin}(A - a') \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin} p},$$

wo ϖ die Horizontalparallaxe am Äquator bezeichnet.

Ist also

$$r \operatorname{Sin}(A - a') \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin} p} = b \text{ und } a - a' = d a,$$

so ist $d a = b \varpi$ und eben so für eine zweyte Beobachtung $d a' = b' . \varpi$, also auch

$$\varpi = \frac{d a' - d a}{b' - b} \cdots\cdots (I).$$

Man sucht nämlich in zwey Beobachtungen, die auf entgegengesetzten Seiten des Meridians in grossen Entfernungen von demselben gemacht worden sind, die Differenz der Rectascension des Mondes von einem oder mehreren ihm nahen Fixsternen, woraus man die scheinbaren Rectascensionen des Mondes erhält, deren Differenz m' seyn soll. Aus den Mondestafeln aber findet man die Bewegung des Mondes in Rectascension für die Zwischenzeit der Beobachtungen, oder die Differenz m der beyden wahren Rectascensionen des Mondes, so dass also $d a' - d a = m' - m$ eine bekannte Grösse, und daher der Werth von ϖ durch die Gleichung

$$\varpi = \frac{m' - m}{b' - b}$$

gegeben ist.

3. §. Auf die Sonne lassen sich diese Methoden nicht anwenden, da sie zu weit von uns entfernt oder da ihre Parallaxe zu klein ist, um durch jenes Verfahren mit Sicherheit bestimmt zu werden. Für sie hat man die Durchgänge der unteren Planeten (Merkur und Venus, besonders der letzteren) vor der Sonnenscheibe als vorzüglich geeignet zur Bestimmung ihrer Parallaxe vorgeschlagen. (Pop. Astr. II. S. 29.)

Ist T die Ortszeit des beobachteten Ein- oder Austritts der Venus und t die östliche Länge des Beobachtungsortes von Paris, so suche man für die Pariser-Zeit (T — t) der Beobachtung die wahre geocentrische Rectascension a und Poldistanz p der Venus mit ihren stündlichen Änderungen D a und D p, sammt ihrem Halbmesser r und ihrer Horizontalparallaxe x. Für die Sonne seyen dieselben Grössen α π ρ und ξ.

Ist s der Stundenwinkel der Sonne und φ die geocentrische Polhöhe des Beobachtungsortes, und

$$B = \frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} s}{\operatorname{Sin}\pi},$$

$$-C = \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\pi - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Cos} s,$$

so ist für dieselbe Zeit T — t (vergl. S. 97)
die Differenz der scheinbaren Rectascension $A' = a - \alpha - B q$,
die Differenz der scheinbaren Poldistanz $P' = p - \pi - C q$,
wo der Kürze wegen $q = x - \xi$ ist.

Ferner ist die relative wahre Bewegung der Venus in einer Secunde in Rectascension und Poldistanz

$$f = \frac{D a - D \alpha}{3600} \text{ und } g = \frac{D p - D \pi}{3600},$$

wenn D a, D p u. s. w. die stündlichen Veränderungen der wahren Rectascension und Poldistanz bezeichnen.

Will man daraus die scheinbare relative Bewegung der Venus f′ und g′ während einer Secunde ableiten, so ist

$$f' = f - 0.000072\, q \frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} s}{\operatorname{Sin} p} \text{ und}$$

$$g' = g + 0.000072\, q \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} s.$$

Nimmt man aber an, dass die bisher gebrauchten Grössen t, a, p und r noch um die unbekannten Correctionen d t, d a, d p und d r zu klein sind, so hat man (wie S. 240)

$$(a - \alpha - B q + d a - f' d t)^2 \operatorname{Sin}^2\pi + (p - \pi - C q + d p - g' d t)^2$$
$$= [(\rho + d \rho) \pm (r' + d r)]^2 \ldots (I)$$

das obere Zeichen für die äussere Berührung der Ränder.

Setzt man der Kürze wegen

$$(a - \alpha)^2 \operatorname{Sin}^2 p + (p - \pi)^2 = \Delta^2 \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{p - \pi}{(a - \alpha) \operatorname{Sin} p} \text{ und } \Delta = (a - \alpha) \frac{\operatorname{Sin} p}{\operatorname{Cos}\omega},$$

und entwickelt man die vorhergehende Gleichung, indem man die zweyten Potenzen an dt, da weglässt, so erhält man (wie Seite 240),

$$\frac{\Delta^2 - (\rho \pm r)^2}{2\Delta} = dt(f \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\omega + g \operatorname{Sin}\omega)$$
$$+ q(B \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\omega + C \operatorname{Sin}\omega)$$
$$- da \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\omega$$
$$- dp \operatorname{Sin}\omega$$
$$\pm (d\rho \pm dr)\frac{(\rho \pm r)}{\Delta},$$

und diess ist die gesuchte Bedingungsgleichung, welche für jede einzelne Beobachtung entwickelt wird. Ist die Länge des Beobachtungsortes genau bekannt, so ist $dt = 0$, und man erhält dann so viel Gleichungen zwischen q, da, dp und $d\rho \pm dr$, als man Beobachtungen hat. Entwickelt man aus ihnen die Werthe dieser Correctionen, so erhält man auch den Werth von $q = x - \xi$. Indem man so die Differenz der beyden Parallaxen erhält, hat man zugleich, durch die Theorie der elliptischen Bewegung der Sonne und der Venus, auch das Verhältniss $q' = \frac{x}{\xi}$ der beyden Parallaxen, und daher diese Parallaxen selbst durch die Gleichungen

$$x = \frac{qq'}{q' - 1}, \text{ und } \xi = \frac{q}{q' - 1}.$$

I. Hätte man die Ecliptik statt des Äquators gewählt, so ist a, α die Länge, und p, $\pi = 90$ die Distanz der Venus und der Sonne von dem Pole der Ecliptik, und wenn L und P die Länge und Poldistanz des Zeniths ist (Seite 99)

$$B = \operatorname{Sin}P \operatorname{Sin}(L - \alpha)$$
$$C = -\operatorname{Cos}P.$$

4. §. Dieselbe Gleichung (I) lässt sich noch auf folgende Weise ausdrücken.

Sey $B = \frac{b\xi}{x - \xi}$ und $C = \frac{c\xi}{x - \xi}$, also das vorhergehende $Bq = b\xi$ und $Cq = c\xi$, so dass man also für die Zeit der Beobachtung hat: relative Parallaxe

der Rectascension $(x-\xi)\dfrac{\text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,s}{\text{Sin}\,\pi}=b\,\xi$,

der Poldistanz

$$(x-\xi)(\text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,\pi-\text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\pi\,\text{Cos}\,s)=-c\,\xi,$$

und daher für dieselbe Zeit die Differenz der

scheinbaren Rectascension $A'=a-\alpha-b\,\xi$,

scheinbaren Poldistanz $P'=p-\pi-c\,\xi$.

Dieses vorausgesetzt, wird die Gleichung (I), wenn man in sie noch die unbekannte Correction $d\,\xi$ der Sonnenparallaxe aufnimmt, oder $\xi+d\,\xi$ statt ξ setzt,

$$(a-\alpha-b\,\xi-b\,d\,\xi+d\,a-f\,d\,t)^2\,\text{Sin}^2\,\pi$$
$$+(p-\pi-c\,\xi-c\,d\,\xi+d\,p-g\,d\,t)^2$$
$$=[(\rho+d\,\rho)\pm(r+d\,r)]^2, \text{ oder}$$

$$(A'-b\,d\,\xi+d\,a-f\,d\,t)^2\,\text{Sin}^2\,\pi+(P'-c\,d\,\xi+d\,p-g\,d\,t)^2$$
$$=[(\rho+d\,\rho)\pm(r+d\,r)]^2$$

wo man statt $\text{Sin}^2\,\pi$ etwas genauer $\text{Sin}^2\,\dfrac{p+\pi}{2}$ setzen kann.

Lässt man die zweyten Potenzen von $d\,t$, $d\,a$, $d\,\xi$.... weg, und setzt der Kürze wegen

$$S^2=A'^2\,\text{Sin}^2\,\pi+P'^2 \text{ und } h=\frac{1}{A'f\,\text{Sin}^2\,\pi+P'g},$$

so geht die letzte Gleichung in folgende über

$$\frac{2\,d\,t}{h}=S^2+2\,A'\,\text{Sin}^2\,\pi\,d\,a+2\,P'\,d\,p-2\,(A'\,b\,\text{Sin}^2\,\pi+P'\,c)\,d\,\xi$$
$$-(\rho\pm r)^2-2\,S\,d\,(\rho\pm r), \text{ oder da nahe}$$

$$S^2-(\rho\pm r)^2=[S+(\rho\pm r)].[S-(\rho\pm r)]=2\,S\,[S-(\rho\pm r)] \text{ ist,}$$

$$d\,t+h\,S\,[(\rho\pm r)-S]=h\,A'\,\text{Sin}^2\,\pi.\,d\,a+h\,P'.\,d\,p$$
$$-h\,(A'\,b\,\text{Sin}^2\,\pi+P'\,c).\,d\,\xi-h\,S\,d.\,(\rho\pm r)\,....\,(\text{II}),$$

und diess ist die zweyte Form der Bedingungsgleichung, die für jede einzelne Beobachtung entwickelt werden soll. In ihr kann man $d\,t=0$ setzen, wenn man die Rechnung für die Zeit der Beobachtung gemacht hat, und die Differenz der Meridiane bereits genau kennt. Man kann aber auch, wenn die Länge des Ortes bekannt ist, und mehrere Beobachtungen desselben Ein- oder Austrittes von verschiedenen Beobachtern an demselben Orte gemacht wurden, die vorhergehende Rechnung, z. B. für das Mittel aller Beobachtungszeiten machen, und dann in der letzten Gleichung $d\,t=T-T'$ setzen, wo T die Zeit der Berechnung, und T' die Zeit der wirklichen Beobachtung ist.

Ex. Für den Durchgang der Venus den 5. Junius im Jahre 1761 hat man aus den Tafeln

mittlere Zeit Paris	Sonne α	Sonne π	Venus a	Venus p
14^h	74° 11′ 52.″8	67° 19′ 27.″3	74° 29′ 4.″3	67° 25′ 11.″9
17^h	19 36.4	18 40.9	24 13.2	27 27.6
20^h	27 20.1	17 54.7	19 22.2	29 43.4

log Rad. Vect. ☉ $= 0.006661$ } für 17^h
log Distanz ♀ ♁ $= 9.461078$ }
wahrer Halbmesser ☉ $= \rho = 946.''8$
♀ $= r = 29.''0$

Horizontalparallaxe der Sonne für die mittlere Entfernung derselben von der Erde 8.″56, also für den 5. Junius $\varepsilon = 8.''4297$, und $x = 29.''6068$, und $x - \varepsilon = 21.''1771$.

Noch ist

$\log f = 8.844425\,n$ } für die Zeit der Eintritte,
$\log g = 8.227387$ }

$\log f = 8.844270\,n$ } für die Zeit der Austritte.
$\log g = 8.226170$ }

Beobachtungen.

Am Vorgebirge der guten Hoffnung

Austritt innere Berührung	21^h	38′	3.″3	mittlerer Zeit
äussere	21	55	34.6.	

In Petersburg

Austritt innere Berührung	22^h	17′	12.″8
äussere	22	35	9.0

	Länge von Paris	Polhöhe
Vorgebirg der guten Hoffnung	$+1^h$ 4′ 20″	−33° 55′ 40″
Petersburg	+1 51 54	+59 56 23

Um die erste dieser Beobachtungen zu berechnen, ist mit der Abplattung $\frac{1}{303}$ die geocentrische Polhöhe

$$\varphi = -33° \; 45' \; 9''.$$

Das Mittel der am Cap angestellten Beobachtungen ist $T = 21^h \; 38' \; 0''$ mittlerer Zeit, also auch

Mittlere Zeit Paris	20^h	$33'$	$40''$				
Sternzeit Paris	1	33	26.2				
Sternzeit des Ortes	2	37	46.2	$=$	$39°$	$26'$	$33''$

$a = 74° \; 14' \; 21''$ $\qquad\qquad = 74 \; 14 \; 21$

$p = 67 \; 35 \; 5$ $\qquad\qquad s = -34 \; 47 \; 48$

$a - \alpha = -10' \; 19.''08$ $\qquad\qquad b\varepsilon = -10.''86$

$p - \pi = +12 \; 22.68$ $\qquad\qquad c\varepsilon = +16.37$

$$A' = a - \alpha - b\varepsilon = -608.''22$$

$$P' = p - \pi - c\varepsilon = +726.''31$$

$$\log A' \operatorname{Cos} \frac{p+\pi}{2} = 2.74935\,n$$

$$\log P' = 2.86112$$

$$S = 918.''045$$

$$(\rho - r) - S = -0.23$$

$$A' f \operatorname{Cos}^2 \frac{p+\pi}{2} = 36.2158$$

$$P' g = 12.2261$$

$$\frac{1}{h} = 48.4419,$$

$$\text{oder } \log h = 8.31478.$$

Dividirt man die vorhergehenden Werthe von $b\varepsilon$ und $c\varepsilon$ durch $\varepsilon = 8.56$, so erhält man

$$\log b = 0.10329\,n, \quad \text{und } \log c = 0.28168$$

$$h S[(\rho - r) - \rho] = -0.23\,h S = -4.4$$

$$T = 21^h \; 38' \; 0''$$

$$T' = 21 \; 38 \; 3.3$$

$$dt = -3.3 \qquad\qquad 3.3$$

$$dt + hS[(\rho - r) - S] = \qquad 7.7$$

$$h A' b \operatorname{Cos}^2 \frac{p+\pi}{2} = 13.578 \qquad \log h = 8.31478$$

$$h P' c = 28.687 \qquad \log S = 2.96286$$

$$\text{Factor von } d\varepsilon = +42.265 \qquad 1.27764$$

$$\text{Factor von } d(\rho - r) = +18.954$$

$$\log A' \operatorname{Sin}^2 \frac{p+\pi}{2} = 2.71463\,n, \; \log P' = 2.86112$$

$$\log h = 8.31478, \quad \log h = 8.31478$$

$$1.02941 \qquad\qquad 1.17590$$

$$\text{Factor von } da = -10.699 \qquad \text{Factor von } dp = +14.998$$

und daher die Bedingungsgleichung (II) für die erste der vier vorhergehenden Beobachtungen

$$+7.''7 = 42.''265\, d\varepsilon + 10.699\, da - 14.998\, dp + 18\ 954\, d(\rho - r),$$

und eben so erhält man für den äusseren Austritt am Cap

$$-11.9 = 39.468\, d\varepsilon + 10.947\, da - 13.971\, dp + 18.325\, d(\rho + r),$$

für den inneren Austritt in Petersburg

$$+23.3 = -18.553\, d\varepsilon + 10.481\, da - 15.905\, dp + 19.541\, d(\rho - r),$$

und für den äusseren Austritt in Petersburg

$$-3.8 = -17.462\, d\varepsilon + 10.761\, da - 14.743\, dp + 18.794\, d(\rho + r).$$

Hat man so die Bedingungsgleichungen aller Beobachtungen entwickelt, so sucht man daraus durch die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von $d\varepsilon$, da, dp und $d(\rho \pm r)$. Man sehe: Entfernung der Sonne von der Erde, von Encke. Gotha 1822. Der Verfasser dieses Werkes fand aus der Discussion sämmtlicher Beobachtungen von 1761 und 1769 Äquator: Horizont: Parallaxe der Sonne für die mittlere Entfernung $\varepsilon = 8.''5776$, woraus die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde folgt 20 666 800 geographische Meilen.

Man bemerkt, dass die Coefficienten von $d\varepsilon$ in den vorhergehenden Gleichungen gegen die übrigen Factoren von da, dp und $d(\rho \pm r)$ sehr gross sind. Die erste Bedingungsgleichung allein gäbe, wenn man $da = dp = d(\rho - r) = 0$ setzt,

$$d\varepsilon = \frac{7 \cdot 7}{24 \cdot 265} = 0.182,$$

woraus folgt, dass die Beobachtung, d. h. die Zahl 7.7 um volle 5 Zeitsecunden fehlerhaft seyn musste, um den Werth von $d\varepsilon$ um 0.1 einer Raumsecunde zu entstellen. Die Differenz der ersten und dritten Beobachtung gibt eben so

$$d\varepsilon = -\frac{15.6}{60.818} = -0.256,$$

also würden hier erst 6 Zeitsecunden Beobachtungsfehler einen von 0.1 Raumsecunden in $d\varepsilon$ erzeugen. Da aber diese Gattung von Beobachtungen der ganz dunkelschwarzen Scheibe der Venus auf dem hellen Grunde der Sonne einer sehr hohen Schärfe fähig ist, so sieht man, dass sich durch die vorgetragene Methode der Werth von $d\varepsilon$ mit grosser Genauigkeit bestimmen lässt. (Pop. Astr. II. S. 29.)

I. Wie man die Wirkung der Parallaxe auf diese Erscheinungen für alle Puncte der Oberfläche der Erde finden kann, werden wir in der folgenden Vorlesung sehen. (V. Pop. Ast.)

5. §. Die Parallaxe der Fixsterne ist viel zu klein, oder ihre Entfernung gegen den Halbmesser der Erde viel zu gross, als dass sie durch unsere Instrumente bestimmt werden könnte. Man hat daher versucht, ob ihre Entfernungen wenigstens gegen den Halbmesser der Erdbahn noch merklich sind. Nennt man a, p die wahre, oder aus dem Mittelpuncte der Sonne gesehenen Rectascension und Poldistanz des Sterns, a′, p′ diese scheinbaren, oder von der Erde gesehenen Grössen, und A, P die Rectascension und Poldistanz der Sonne, und ist r die Entfernung des Sterns von der Sonne, r′ von der Erde, und R der Erde von der Sonne, so hat man, (wie Seite 117)

$$r \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} p + R \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} P = r' \operatorname{Cos} a' \operatorname{Sin} p'$$
$$r \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} p + R \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} P = r' \operatorname{Sin} a' \operatorname{Sin} p'$$
$$r \operatorname{Cos} p + R \operatorname{Cos} P = r' \operatorname{Cos} p'.$$

Die Division der beyden ersten dieser Gleichungen gibt

$$\operatorname{tg} a' = \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} p + \varpi \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} P}{\operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} p + \varpi \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} P},$$

wenn die jährliche Parallaxe

$$\varpi = \frac{R}{r}$$

gesetzt wird.

Aus dieser Gleichung folgt, wie Seite 97, wenn

$$a' - a = da, \text{ und } p' - p = dp$$

gesetzt wird,

$$da = \varpi \frac{\operatorname{Sin} P}{\operatorname{Sin} p} . \operatorname{Sin}(A-a) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varpi \operatorname{Sin} P}{\operatorname{Sin} p}\right)^2 \operatorname{Sin} 2(A-a) \operatorname{Sin} 1''$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{\varpi \operatorname{Sin} P}{\operatorname{Sin} p}\right)^3 \operatorname{Sin} 3(A-a) \operatorname{Sin}^2 1'' - \ldots$$

und wenn man bey der ersten Potenz von ϖ stehen bleibt,

$$dp = \varpi (\operatorname{Cos} P \operatorname{Sin} p - \operatorname{Sin} P \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos}(A-a)), \text{ oder}$$

$$dp = \varpi \left(\operatorname{Sin}(p-P) + 2 \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} P \operatorname{Sin}^2 \frac{A-a}{2}\right).$$

Man sieht aus diesen Werthen von d a und d p, dass die Parallaxe d p der Poldistanz immer kleiner ist, als die

absolute Parallaxe ϖ, während im Gegentheile die Parallaxe da der Rectascension oft beträchtlich grösser als ϖ werden kann, dass es also auch vortheilhafter ist, die Beobachtungen der Rectascension zur Bestimmung der Parallaxe P zu nehmen. Wählt man ein solches Sternpaar, die in ihrer Rectascension a und a' nahe um 180° verschieden sind, und nimmt man die Parallaxe da für beyde Sterne gleich gross an, so wird durch die erste Beobachtung dieser Sterne die Rectascension des einen gleich $a + da$, und des andern gleich $a' - da$, also beyder Differenz gleich $\Delta = a - a' + 2\,da$. Nach einem halben Jahre aber werden die beobachteten Rectascensionen dieser Sterne $a - da$ und $a' + da$, also beyder Differenz $\Delta' = a - a' - 2\,da$ seyn, wodurch man daher

$$\Delta - \Delta' = 4\,da,$$

oder die doppelte Summe beyder Parallaxen erhält, die vielleicht für unsere Instrumente merkbar ist, wenn auch die einfachen Parallaxen dieser Sterne selbst nicht mehr unterschieden werden können. Zu diesem Zwecke wird man aber die beyden Sterne in jenen beyden Jahreszeiten beobachten, wo die Parallaxen ihrer Rectascensionen den grössten positiven oder negativen Werth haben, d. h. wie aus den Gleichungen für da folgt, wenn a gleich $90 + A$, oder gleich $270 + A$ ist.

Vorlesung VII.

Finsternisse.

1. §. Sey a, p, r, x und m die wahre Rectascension, Poldistanz, Entfernung von der der Erde, Äquatorial-Horizontalparallaxe und Halbmesser des Mondes, und α, π, ρ, ξ, μ dieselben Grössen für die Sonne. Die stündlichen Änderungen dieser Grössen seyen da, $d\alpha$....

Diese Bezeichnung vorausgesetzt, wollen wir zuerst sehen, wie man eine Mondesfinsterniss voraus berechnen kann, die bekanntlich entsteht, wenn die Erde zwischen die Sonne und den Mond tritt, und ihren Schatten auf den Mond wirft.

Für die Zeit t der wahren Opposition beyder Gestirne, für welche also $a = 180 + \alpha$ ist, sey $p - \pi$ die Differenz ihrer Poldistanzen.

Man suche die Grössen n und e aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg} n = \frac{d\pi - dp}{(da - d\alpha)\operatorname{Sin}\pi},$$

$$e = (\pi - p)\operatorname{Cos} n,$$

so ist offenbar n die Neigung der relativen Bahn des Mondes gegen den Äquator, und e die kürzeste Distanz des Mittelpunctes des Schattens von jener Bahn zur Zeit der Opposition.

Die stündliche relative Bewegung des Mondes in seiner Bahn ist aber

$$\frac{dp - d\pi}{\operatorname{Sin} n},$$

die wir gleich $\frac{1}{h}$ setzen wollen, so dass man hat

$$h = \frac{\operatorname{Sin} n}{dp - d\pi}.$$

Schneidet man endlich den Schatten der Erde durch eine Ebene, welche durch den Mittelpunct des Mondes geht, und senkrecht auf der Schattenaxe steht, und nennt man R den von der Erde gesehenen Halbmesser dieses kreisförmigen Schattenschnittes, so ist

$$R = x + \xi - \mu,$$

wovon man sich durch eine kleine Figur leicht überzeugen wird, wenn man dabey bemerkt, dass der aus dem Monde gesehene Halbmesser der Erde $= x$, und der aus der Sonne gesehene Halbmesser derselben $= \xi$ ist.

Das Vorhergehende reicht hin, alle Umstände der Mondesfinsterniss zu bestimmen.

Es ist nämlich die Zeit θ der Mitte der Finsterniss

$$\theta = t \pm (\pi - p)\, h \operatorname{Sin} n,$$

und die Zeit T, wo ein Theil vom Mond verfinstert ist, der sich zu seinem Halbmesser verhält wie $x' : 1$,

$$T = \theta \pm h \operatorname{ctg} U,$$

$$\text{wo } \operatorname{Cos} U = \frac{e}{R + (1 - N) \cdot m}.$$

So hat man für den Anfang und das Ende der partiellen Finsterniss $N = 0$; für den Anfang und das Ende der totalen Finsterniss $N = 2$; für den Ein- und Austritt des Mondsmittelpunctes $N = 1$ u. s. w.

Endlich ist die grösste Verfinsterung des Mondes, zur Zeit, wo er am tiefsten in dem Schatten der Erde steht, gleich $R + m - e$.

Wählt man, was bequemer ist, die Ecliptik statt dem Äquator, so bezeichnen a, α die Längen, und p, π die Distanzen von dem Pole der Ecliptik, wo also $\pi = 90°$ ist.

Um endlich noch die Orte der Oberfläche der Erde zu finden, welche die Mondesfinsterniss sehen, nehmen wir z. B. an, dass der Anfang der partiellen Finsterniss um acht Uhr Abends Pariser Zeit Statt habe. Da der Mond in Opposition ist, so wird der Beobachter, der $4^h = 60°$ östlich von Paris liegt, den Mond in seinem Meridian sehen. In diesem Meridian nehme man den Punct, dessen geographische Breite gleich $90 - p$ ist, so sieht der Beobachter in diesem Puncte den Mond in seinem Zenithe. Führt man daher diesen Punct unter den fixen Meridian des Globus, und stellt

den letzten auf die Polhöhe $90° - p$, so sehen alle Orte der Erde, welche über dem Horizonte des Globus sind, den Anfang der Finsterniss, während dieser Anfang allen übrigen Orten der Erde unsichtbar ist. Eben so kann man die grössten Kreise der Erde finden, in welchen alle Orte eingeschlossen sind, die den Anfang der totalen, oder das Ende der partiellen Finsterniss u. s. w. sehen.

Ex. Für die Mondesfinsterniss des 3. Novembers 1827 ist die wahre Zeit Wien der Opposition in Länge $6^h\ 17'\ 14''$ Abends, und für diese Zeit ist

wahre Länge des Monds und der Sonne

$$a = \alpha = 40°\ 33'\ 4'',$$

Poldistanz des Monds

$$p = 90°\ 28'\ 59'',\ \pi = 90°,$$

$$\left.\begin{array}{l} dp = +\ 0°\ 2'\ 54'',\ d\pi = 0 \\ da - d\alpha = 0°\ 28'\ 48'' \end{array}\right\}\ \text{stündliche Änderungen},$$

$$m = 15'\ 11'' \qquad x = 55'\ 43'',$$

$$\mu = 15'\ 6.''6 \qquad \xi = 0'\ 9'', \text{ also}$$

$$R = x + \xi - \mu = 39.''75.$$

Nach den Erfahrungen soll man diesen Werth von R um seinen sechzigsten Theil vergrössern, um ihn mit den Beobachtungen übereinstimmender zu machen, daher verbesserter Werth von $R = 40.'412$, und $R + m = 55.'59$.

Weiter ist $n = 5°\ 45'$, $e = -\ 28.'83$, und $h = 0.03455$,

$$\text{also } (\pi - p)\, h \operatorname{Sin} n = -\ 0^h.\ 1003.$$

Zeit der Mitte der Finsterniss

$$\theta = t - 0^h.\ 1003 = 6^h\ 11'\ 13''$$

wahre Zeit Wien,

für $N = 0$ ist $U = 58°\ 45'$, und $h\, e \operatorname{tg} U = 1^h\ 38'\ 11''$,

also Anfang der partiellen Finsterniss $4^h\ 32'\ 42''$

Ende - - - - - - - - - - $7\ \ 49\ \ 44$,

Grösse der Finsterniss $R + m - e = 26.'72$, oder der Mond wird um den $\frac{26.72}{2m} = 0.88$sten Theil seines Durchmessers verfinstert. Diese Finsterniss ist daher bloss partiell, daher auch für $N = 2$ der Werth von U unmöglich ist.

Um zu finden, ob diese Finsterniss für Wien sichtbar ist, berechnet man mit der Declination $-\ 15°\ 5'$ der Sonne für diesen Tag die Zeit des Sonnenunterganges $4^h\ 50'$, und

da nach dem Vorhergehenden die Zeit des Anfangs der Finsterniss vor 4^h 50′ fällt, so ist der Mond zur Zeit des Anfangs der Finsterniss für Wien noch nicht aufgegangen, also auch dieser Anfang in Wien nicht sichtbar, aber wohl das Mittel und das Ende der Finsterniss. Für Lissabon geht an diesem Tage die Sonne um 5^h 10′ unter, und da diese Stadt um 1^h 42′ westlich von Wien liegt, so ist der Anfang der Finsterniss um 2^h 51′, und das Ende um 6^h 8′ Lissaboner Zeit, also sieht diese Stadt nur die letzten Erscheinungen dieser Finsterniss. Überhaupt ist diese Finsterniss in ganz Asien, im östlichen Europa und Afrika, und auf allen Inseln des stillen Meeres sichtbar, während für das westliche Europa und für Amerika der Mond erst während der Finsterniss aufgeht.

2. §. Auf eine ähnliche Art wird man auch für Sonnenfinsternisse verfahren, wenn man die Erscheinungen derselben bloss für die Erde im Allgemeinen sucht. Da eine Sonnenfinsterniss entsteht, wenn der Mond zwischen die Sonne und die Erde tritt, und uns dadurch das Licht der Sonne entzieht, so hat man wieder, wenn $p - \pi$ die Differenz der Poldistanzen beyder Gestirne zur Zeit t der Conjunction (wo $a = \alpha$ ist) bezeichnet, und wenn n, e, h die vorhergehenden Bedeutungen haben,

$$\operatorname{tg} n = \frac{d\pi - dp}{(da - d\alpha)\operatorname{Sin}\pi}, \text{ und } e = (\pi - p)\operatorname{Cos} n,$$

$$\text{und } h = \frac{\operatorname{Sin} n}{d\pi - dp}.$$

Sind nun Fig. 10. L, S, T die Mittelpuncte des Mondes, der Sonne und der Erde, A der Beobachter auf der Erde, der Sonne und Mond in seinem Horizonte sieht, so ist

$$ALT = x,\ AST = \xi$$

(in der obigen Bedeutung), ferner $u = LAS$ u. s. w. die scheinbare Entfernung der Sonne von dem Monde, und $y = LTS$ die geocentrische Entfernung derselben. Es ist aber $z = u + x = y + \xi$, also auch $y = u + x - \xi$. Für den Anfang der partiellen Finsterniss ist $u = m + \mu$, also $y = m + \mu + x - \xi$; für den Anfang der totalen ist $u = m - \mu$, also $y = m - \mu + x - \xi$, für den Anfang der centralen ist $u = 0$, also $y = x - \xi$ u. s. w.

Man hat daher für die Zeit der Mitte der Finsterniss

$$\Theta = t \pm (\pi - p) h \operatorname{Sin} n,$$

und für die Zeit T, wo von der Sonne ein Theil verfinstert ist, der sich zu ihrem Halbmesser verhält, wie N zu 1,

$$T = \Theta \pm h e \operatorname{tg} U$$

$$\text{wo } \operatorname{Cos} U = \frac{e}{m + (1 - N)\mu + x - \xi} \text{ ist.}$$

Für den Anfang und das Ende der partiellen Finsterniss ist $N = 0$, für die totale ist $N = 2$; für die centrale ist $N = \frac{m + \mu}{\mu}$ oder $\operatorname{Cos} U = \frac{e}{x + \xi}$ u. s. w. Ist $m < \mu$, so ist die totale Finsterniss eigentlich ringförmig.

Ex. Für die grosse Sonnenfinsterniss des 9. Octobers 1847 hat man

	Mittlere Zeit Paris					
	6^h			12^h		
Sonne wahre Länge	195°	18′	57″.4	159°	33′	48″.1
α	194	6	10 .2	194	19	56 .7
π	96	2	6 .9	96	7	50 .7
μ		16	3 .05		16	3 .05
ξ			8 .81			8 .81
Mond wahre Länge	193°	50′	57″.5	196°	47′	50″.3
Distanz v. Pol d. Ecliptik	89	37	36 .9	89	21	40 .5
a	192	53	21 .1	195	43	29 .7
p	95	7	24 .9	96	0	55 .7
m		14	41 .2		14	41 .2
x		53	54 .1		55	55 .1

Schiefe der Ecliptik 23° 27′ 22″.5.

Daraus folgen die stündlichen Änderungen

$d a = 28' \; 21''.433 \quad d p = +8' \; 55''.13$

$d \alpha = \; 2' \; 17 .75 \quad d \pi = +0 \; 57 .3.$

Zeit der Conjunction in Rectascension

$8^h \; 47' \; 38''.688$

und für diese Zeit $a - \alpha = 194° \; 12' \; 35''.06$

$p = \; 95 \; 30 \; 29.3$

$\pi = \; 96 \; \; 4 \; 47.1$

Mittlere Zeit $+ 0^h \; 12' \; 32'' =$ wahre Zeit.

Diess vorausgesetzt erhält man

$n = -17° \, 4' \, 24''$, $\log e = 1.515677$ und $\log h = 8.566653$

Zeit der Mitte der Finsterniss $\Theta = 9^h\, 9' 55''$ mittlere Zeit Paris
$N = 0$ gibt $U = 67° 10' 14''$ für die partielle Finsterniss
$N = \frac{m+\mu}{\mu}$ gibt $U = 52\ 25\ 23$ für die centrale Finsterniss
$N = 2 \ldots$ gibt $U = 51\ 16\ 0$ für die totale Finsterniss.

	Anfang		Ende
Also auch für die partielle Finst.	$6^h\ 17'\ 38''$	- -	$12^h\ 2'\ 12''$
„ „ „ centrale Finst.	7 35 41	- -	10 44 10
„ „ „ totale Finst.	7 31 53	- -	10 47 57

und da $m < \mu$, so ist die totale Finsterniss ringförmig.

I. Da eine Sonnenfinsterniss für irgend einen Ort der Erde nur dann entstehen kann, wenn die scheinbare Distanz der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes kleiner als $m + \mu$ ist, und da der geocentrische Abstand dieser Mittelpuncte durch die Parallaxe höchstens um $x - \xi$ vermindert werden kann, so ist eine Sonnenfinsterniss nur dann möglich, wenn zur Zeit der Conjunction der geocentrische Abstand der Mittelpuncte der Sonne und des Monds, oder die wahre Breite des Monds, kleiner ist als $m + \mu + x - \xi$, oder wenn die Entfernung u des Monds, und daher auch der Sonne, von einem der Mondsknoten kleiner ist, als die durch die Gleichung gegebene:

$$\text{Sin}\, u = \frac{\text{Sin}\,(m + \mu + x - \xi)}{\text{Sin}\, n}$$

(wo n die Neigung der Mondsbahn gegen die Ecliptik bezeichnet, s. S. 115). Da die Grössen m, μ, x, ξ, n veränderlich sind, so ändern sich auch die Grenzen der Möglichkeit einer Sonnenfinsterniss. Ist zur Zeit der Conjunction u kleiner als 15° 24′, so ist eine Sonnenfinsterniss gewiss; ist u grösser als 18° 22′, so ist sie unmöglich; ist u zwischen diesen Grenzen, so muss man durch genauere Rechnung untersuchen, ob die Breite des Monds zur Zeit der Conjunction kleiner ist als $m + \mu + x - \xi$.

Eben so kann eine Mondsfinsterniss nur dann Statt finden, wenn zur Zeit der Opposition die geocentrische Distanz der Mittelpuncte des Monds und des Schattenschnitts, oder (da die Schattenaxe in der Ecliptik liegt) die Breite des Monds kleiner ist als die Summe ihrer von der

Erde gesehenen Halbmesser, d. h. (nach §. 1.) kleiner als $x + \xi - \mu + m$, oder wenn Sin u kleiner ist als

$$\frac{\operatorname{Sin}(x + \xi - \mu + m)}{\operatorname{Sin} n}.$$

Ist zur Zeit der Conjunction der Abstand des Monds von einem seiner Knoten, oder der Abstand der Sonne von dem gegenüberliegenden Knoten, kleiner als $9° \; 31'$, so hat gewiss eine Mondsfinsterniss Statt; ist aber dieser Abstand grösser als $12° \; 4'$, so ist keine Mondsfinsterniss möglich.

3. §. Wir wollen nun über den Weg, welchen der Schatten des Monds bey einer Sonnenfinsterniss auf der Oberfläche der Erde zurücklegt, Untersuchungen anstellen.

Bestimmt man zuerst die Lage des Mittelpuncts des Mondes gegen den der Erde durch drey rechtwinkelige Coordinaten ξ, υ, ζ, von denen ξ in der Durchschnittslinie des Declinationskreises der Sonne mit dem Äquator, und ξ, υ in der Ebene des Äquators liegen, so ist

$$\xi = r \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} (a - \alpha)$$
$$\upsilon = r \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} (a - \alpha)$$
$$\zeta = r \operatorname{Cos} p.$$

Legt man nun durch die vorige Axe der υ eine andere Ebene, welche gegen den Äquator um $90° - \pi$, d. h. um die Declination der Sonne, geneigt ist, und nimmt man zur Axe der y wieder die vorige Axe der υ, die Axe der x in der neuen Ebene darauf senkrecht, und die Axe der z auf dieser Ebene senkrecht, so wird die Ebene, welche durch die Axen der ξ und x geht, auf der Axe der y oder υ, und daher auch auf dem Äquator senkrecht, und wird also der Declinationskreis der Sonne seyn; die Axe der x wird mit der Axe der ξ einen Winkel $= 90° - \pi$ machen, und wird daher nach dem Mittelpuncte der Sonne gehen; die Ebene der y z wird auf der die Mittelpuncte der Erde und der Sonne verbindenden geraden Linie senkrecht, und y wird mit dem Äquator parallel seyn.

Nun hat man für die neuen Coordinaten, welche die Lage des Monds gegen die Erde bestimmen, die Ausdrücke:

$$x = \xi \,\text{Sin}\, \pi + \zeta \,\text{Cos}\, \pi,$$
$$y = \upsilon,$$
$$z = \zeta \,\text{Sin}\, \pi - \xi \,\text{Cos}\, \pi;$$

oder
$$x = r\,[\text{Sin}\, p \,\text{Sin}\, \pi \,\text{Cos}\,(a - \alpha) + \text{Cos}\, p \,\text{Cos}\, \pi],$$
$$y = r \,\text{Sin}\, p \,\text{Sin}\,(a - \alpha),$$
$$z = r\,[\text{Cos}\, p \,\text{Sin}\, \pi - \text{Sin}\, p \,\text{Cos}\, \pi \,\text{Cos}\,(a - \alpha)].$$

Bestimmt man eben so die Lage des Beobachters auf der Oberfläche der Erde gegen den Mittelpunct derselben durch drey den x, y, z parallelen Coordinaten X, Y, Z, und bezeichnet R die Entfernung des Beobachtungsortes vom Mittelpunct der Erde, φ die geocentrische Polhöhe, s den Stundenwinkel der Sonne, so hat man die den vorigen analogen Ausdrücke:

$$X = R\,(\text{Cos}\,\varphi \,\text{Sin}\, \pi \,\text{Cos}\, s + \text{Sin}\,\varphi \,\text{Cos}\, \pi),$$
$$Y = R \,\text{Cos}\,\varphi \,\text{Sin}\, s,$$
$$Z = R\,(\text{Sin}\,\varphi \,\text{Sin}\, \pi - \text{Cos}\,\varphi \,\text{Cos}\, \pi \,\text{Cos}\, s).$$

Wir wollen nun (Fig. 11) durch den Mittelpunct L des Mondes in der Nähe der Conjunction eine Ebene senkrecht auf die gerade Linie TS legen, welche die Mittelpuncte T, S der Erde und der Sonne mit einander verbindet. Diese Ebene werde von der geraden Linie S T in C, und von der den Mittelpunct der Sonne und den Beobachtungsort verbindenden geraden Linie in B getroffen; die geraden Linien A C F, a B f in dieser Ebene seyen mit dem Äquator parallel, und L F, B E, D C auf jenen senkrecht.

Nimmt man r Sin 1″ zur Einheit an, wo r = T L ist, so wird, weil der Winkel S T L nur klein ist, auch die Entfernung C T der Ebene vom Mittelpunct der Erde nahe $= \frac{1}{\text{Sin}\, 1''}$ seyn. T S ist $= r.\, \frac{x}{\xi}$, wenn x und ξ wieder die Ho- $= \frac{1}{\text{Sin}\, 1''}$ talparallaxe des Monds und der Sonne bezeichnen, also, da wir $r = \frac{1}{\text{Sin}\, 1''}$ setzen, $TS = \frac{x}{\xi \,\text{Sin}\, 1''}$, und daher die Entfernung der Sonne von der Ebene

$$SC = \frac{1}{\text{Sin}\, 1''}\left(\frac{x}{\xi} - 1\right) = \frac{x - \xi}{\xi \,\text{Sin}\, 1''}.$$

B L ist der scheinbaren Distanz Δ der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes gleich (eigentlich $= r \,\text{Sin}\, \Delta$); C L drückt die geocentrische Distanz dieser Mittelpuncte aus.

CF, FL, sind offenbar die vorigen Coordinaten y, z, und es ist

$$y = \frac{\mathrm{Sin}\,(a-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,p}{\mathrm{Sin}\,1''},$$

$$z = \frac{\mathrm{Cos}\,p\,\mathrm{Sin}\,\pi - \mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,(a-\alpha)}{\mathrm{Sin}\,1''},$$ oder nahe

$$y = (a-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,p,$$

$$z = (\pi - p) - \frac{1}{4}(a-\alpha)^2\,\mathrm{Sin}\,1''\,\mathrm{Sin}\,2\pi,$$

oder, wenn man das Quadrat von $a - \alpha$ vernachlässigt,

$$z = \pi - p;$$

und diese Coordinaten kann man für jede gegebene Pariser Zeit berechnen. Nimmt man an, dass der Mond einige Zeit hindurch in unserer Projectionsebene eine gerade Linie ADL beschreibe, so findet man den Winkel LAF = n aus der Gleichung

$$\mathrm{tg}\,n = \frac{z'-z}{y'-y},$$

wenn man zwey Paare von Coordinaten y, z und y', z' für zwey angenommene Zeiten berechnet hat. Nennt man dann CD = P, so wird seyn

$$P = z - y\,\mathrm{tg}\,n = z' - y'\,\mathrm{tg}\,n.$$

CE, EB aber werden sich zu den vorigen Coordinaten Y, Z verhalten, wie SC : ST — X, oder nahe = SC : ST = $x - \xi : x$; demnach wird man haben, da $R = r\,\mathrm{Sin}\,x = x$ ist,

$$CE = (x-\xi)\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,s$$

$$EB = (x-\xi)(\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\pi - \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,s).$$

4. §. Dieses vorausgesetzt, wollen wir die Lage des Orts auf der Oberfläche der Erde suchen, der zu einer gegebenen Pariser Zeit eine gegebene Distanz Δ der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes als grösste Phase sieht.

Die grösste Phase einer Finsterniss für einen Ort der Erde hat dann Statt, wenn die an diesem Ort gesehene Distanz Δ = BL' am kleinsten ist. Für diesen Fall ist offenbar der Winkel BL'A ein rechter, und, wenn L'f'F' auf AC senkrecht ist, BL'F' = n, also EF' = Bf' = $\Delta\,\mathrm{Sin}\,n$, und L'f' = $\Delta\,\mathrm{Cos}\,n$; nun ist

$$CE = CF' + F'E = y + \Delta\,\mathrm{Sin}\,n,$$

$$BE = L'F' - L'f' = z - \Delta\,\mathrm{Cos}\,n.$$

Vermittelst dieser Ausdrücke findet man CE, EB, da man für die gegebene Pariser Zeit y, z nebst n berechnen kann.

Es ist aber auch (nach §. 3.)

$$CE = (x-\xi)\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,s,$$

und $$EB = (x-\xi)(\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\pi - \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,s),$$

oder, wenn man $\frac{CE}{x-\xi}$ durch Y', und $\frac{EB}{x-\xi}$ durch Z' bezeichnet,

$$Y' = \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,s, \text{ daher } \mathrm{Cos}\,s = \sqrt{1-\frac{Y'^2}{\mathrm{Cos}^2\varphi}},$$

und $$Z' = \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\pi - \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,s,$$

woraus folgt

$$(\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\pi - Z')^2 = \mathrm{Cos}^2\pi\,(1-\mathrm{Sin}^2\varphi - Y'^2),$$

$$\text{daher } \mathrm{Sin}\,\varphi = Z'\,\mathrm{Sin}\,\pi + \mathrm{Cos}\,\pi\sqrt{1-Y'^2-Z'^2}.$$

So findet man die gesuchte Polhöhe des Ortes.

Ist so φ bekannt, so erhält man s aus der Gleichung

$$\mathrm{Sin}\,s = \frac{Y'}{\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

So findet man die wahre Zeit des Ortes, welche mit der gegebenen Pariser Zeit verglichen, die gesuchte geographische Länge des Ortes gibt.

I. Wir haben also die Gleichungen:

$$Y' = \frac{y+\Delta\,\mathrm{Sin}\,n}{x-\xi},$$

$$Z' = \frac{z-\Delta\,\mathrm{Cos}\,n}{x-\xi};$$

$$\mathrm{Sin}\,\varphi = Z'\,\mathrm{Sin}\,\pi + \mathrm{Cos}\,\pi\sqrt{1-Y'^2-Z'^2}, \text{ und } \mathrm{Sin}\,s = \frac{Y'}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

$$\text{oder } \mathrm{tg}\,\psi = \frac{\sqrt{1-Y'^2-Z'^2}}{Z'}, \ \mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{Z'\,\mathrm{Sin}\,(\pi+\psi)}{\mathrm{Cos}\,\psi},$$

$$\text{und } \mathrm{Sin}\,s = \frac{Y'}{\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

Zur bequemeren Berechnung kann man diese Gleichungen auch so ausdrücken:

$$\mathrm{Sin}\,A = \frac{y+\Delta\,\mathrm{Sin}\,n}{x-\xi},$$

$$\mathrm{Cos}\,B = \frac{z-\Delta\,\mathrm{Cos}\,n}{x-\xi},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\operatorname{Cos} B} \sqrt{\operatorname{Sin}(B + A) \operatorname{Sin}(B - A)}.$$

Kennt man so A, B, ψ, so ist

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{\operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}(\pi + \psi)}{\operatorname{Cos}\psi}, \text{ und}$$

$$\operatorname{Sin} s = \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Cos}\varphi}.$$

Anmerkung. Bisher wurde vorausgesetzt, dass L′ nördlich von B liege, oder dass für den Ort der Erde die Sonne auf der Nordseite verfinstert werde; für den entgegengesetzten Fall muss man Δ negativ setzen.

II. Setzt man in diesen Ausdrücken

$$\Delta = m + (1 - N)\mu,$$

so erhält man die Orte der Oberfläche der Erde, welche zu einer gegebenen Pariser Zeit eine Verfinsterung eines Theils der Sonne, der sich zu ihrem Halbmesser verhält, wie N : 1, als grösste Phase der Finsterniss sehen, oder man erhält den diesem Werthe von Δ entsprechenden Weg des Mondschattens auf der Oberfläche der Erde, und zwar die südliche oder nördliche Grenze dieses Weges, je nachdem man Δ positiv oder negativ nimmt. So gibt $N = 0$ oder $\Delta = \pm(m + \mu)$ alle Orte der Erde, welche nur eine äussere Berührung der Ränder der Sonne und des Mondes sehen, oder $N = 0$ gibt die beyden äussersten Grenzen des Schattenweges. $\Delta = 0$ gibt alle Orte, welche eine centrale Finsterniss sehen, oder den Weg der Schattenaxe; $\Delta = m - \mu$ gibt die Orte der inneren Berührungen der beyden Ränder u. s. w.

5. §. Wir wollen nun noch die Orte der Erde suchen, welche die Finsterniss zuerst und zuletzt sehen.

Ein solcher Ort liegt in der geraden Linie, welche die Erde und die Sonne auf der einen Seite, und den Mond auf der andern Seite berührt. Für ihn sind also Sonne und Mond im Horizont, (denn die Horizontallinie berührt einen Sonnenrand und einen Mondrand), woraus (nach S. 40) folgt

$$\operatorname{Cos} s = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{Cotg}\pi;$$

und die Mittelpuncte der Sonne und des Mondes liegen in einerley Vertikalebene (die Erde als sphärisch angenommen), oder die geraden Linien SC, SB, SL liegen in einer Ebene, und ihre Durchschnittspuncte C, B, L, mit unserer

Projectionsebene liegen daher in einer geraden Linie. Die scheinbare Distanz Δ der Mittelpuncte oder B L ist für den Anfang oder das Ende der Finsterniss $= m + \mu$, die geocentrische Distanz D oder C L $= m + \mu + x - \varepsilon$; B C ist $= S C \text{ tg } \varepsilon = x - \varepsilon$. Zieht man C G senkrecht auf A L, so ist der Winkel D C G $= n$, also C G $= P \text{ Cos } n$, und daher, wenn man den Winkel C L G $= \omega$ nennt,

$$\text{Sin } \omega = \frac{P \text{ Cos } n}{D}.$$

Da der Winkel B C E $= \omega + n$ ist, so ist

$$B E = (x - \varepsilon) \text{ Sin } (\omega + n).$$

Es war aber auch (nach §. 3.)

$$B E = (x - \varepsilon) (\text{Sin } \varphi \text{ Sin } \pi - \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \pi \text{ Cos } s),$$

oder, wenn man für Cos s seinen Werth $= - \text{tg } \varphi \text{ Cotg } \pi$ substituirt,

$$B E = (x - \varepsilon) \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Sin } \pi},$$

welchen Ausdruck man auch einfacher so findet: die Ebene T C D ist der Declinationskreis der Sonne, denn sie ist auf der geraden Linie A C, und folglich auf dem Äquator senkrecht, und geht durch den Mittelpunct S der Sonne; die Ebene T C B ist der Vertikalkreis der Sonne, also ist der Winkel B C D dem Winkel ν zwischen dem Declinationskreis und dem Vertikalkreis der Sonne gleich, mithin B E $= (x - \varepsilon) \text{ Cos } \nu$, d. i. (nach S. 26, wenn man dort $z = 90°$ setzt),

$$B E = (x - \varepsilon) \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Sin } \pi}, \text{ wie vorher.}$$

Die Vergleichung beyder Ausdrücke für B E gibt

$$\text{Sin } \varphi = \text{Sin } (\omega + n) \text{ Sin } \pi.$$

Man findet demnach die Polhöhe φ des gesuchten Ortes durch die Gleichungen:

$$\text{Sin } \omega = \frac{P \text{ Cos } n}{D},$$

wo $D = m + \mu + x - \varepsilon$ ist, und wo man P und n nach §. 3 finden kann;

$$\text{und } \text{Sin } \varphi = \text{Sin } (\omega + n) \text{ Sin } \pi.$$

Kennt man φ, so gibt die Gleichung

$$\text{Cos } s = - \text{tg } \varphi \text{ Cotg } \pi,$$

die wahre Zeit des Ortes, welche, mit der nach §. 2 gefunde-

nen Pariser Zeit derselben Erscheinung verglichen, die gesuchte Länge des Ortes gibt, welcher den Anfang der Finsterniss zuerst oder das Ende derselben zuletzt sieht. Es ist klar, dass auf diese Art beyde Orte zugleich gefunden werden, da Sin ω einen doppelten Werth von ω gibt. Dieselben Gleichungen geben auch die beyden Orte, welche die centrale Finsterniss zuerst oder zuletzt sehen, wenn man $D = x - \xi$ setzt.

Noch kann bemerkt werden, dass man die Pariser Zeit dieser Erscheinungen auch unmittelbar aus den Gleichungen

$$y = D \operatorname{Cos}(\omega + n),$$
$$z = D \operatorname{Sin}(\omega + n),$$

ohne Hülfe des §. 2 ableiten kann. Durch diese Gleichungen findet man nämlich, da D, ω und n bekannt sind, die Werthe von y und z. Hat man daher eine kleine Tafel, welche diese Werthe für jede Stunde Pariser Zeit während der Dauer der Finsterniss gibt, so kann man daraus durch Interpolation die Pariser Zeit der Erscheinungen finden.

In unserem Beyspiele (S. 289) ist, wenn

$D = m + \mu + x - \xi$ und $P = 1940''$ gesetzt wird,

$$\operatorname{Sin}\omega = \frac{P \operatorname{Cos} n}{D}, \quad \text{also } \omega = \left.\begin{matrix} 158^\circ\ 32'\ 31'' \\ \text{oder } 21\ \ 27\ \ 29 \end{matrix}\right\}.$$

Partielle Finsterniss

	Anfang			Ende
$\varphi =$	$38^\circ\ 17'\ 8''$	Polhöhe	$\varphi =$	$4^\circ\ 21'\ 10''$
$s =$	$6^h\ 19'\ 9''$	wahre Ortszeit	$s =$	$17^h\ 58'\ 8''$
	6 30 10	wahre Pariser Zeit		12 14 44
$\lambda = -$	$0^h\ 11'\ 1''$	westl. Länge v. Paris	$\lambda = +$	$5^h\ 44'$ östl. L.

Eben so gibt

$$\operatorname{Sin}\omega = \frac{P \operatorname{Cos} n}{x - \xi} \text{ den Werth } \omega = \left.\begin{matrix} 144^\circ\ 54'\ 37'' \\ \text{oder } 35\ \ 5\ \ 23 \end{matrix}\right\}$$

und daher

Centrale Finsterniss

	Anfang		Ende
$\varphi =$	$51^\circ\ 45'\ 35''$	$\varphi =$	$17^\circ\ 54'\ 14''$
$s =$	18 30 58	$s =$	$18^h\ 7\ 55''$
$\lambda = -$	$1^h\ 17$ westlich	$\lambda = +$	$7^h\ 11'$ östlich.

Um den ganzen Schattenweg nach §. 5. I zu bestimmen, hat man zuerst die kleine Tafel

Mittlere Zeit Paris	$\frac{(a-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,\pi}{x}$	$\frac{\pi - p}{x}$
$6^h\ 0'$	− 1.345	+ 1.013
8 0	− 0.382	+ 0.719
10 0	+ 0.580	+ 0.423
12 0	+ 1.540	+ 0.126

Ferner ist

$$\frac{m+\mu}{x}\,\mathrm{Sin}\;n = -\;0.167$$

$$\frac{m+\mu}{x}\,\mathrm{Cos}\;n = +\;0.545,$$

für die Südseite

$$Y = \frac{(a-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,\pi + \Delta\,\mathrm{Sin}\,n}{x}$$

$$Z = \frac{(\pi - p) - \Delta\,\mathrm{Cos}\,n}{x}$$

für die Nordseite

$$Y = \frac{(a-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,\pi - \Delta\,\mathrm{Sin}\,n}{x},$$

$$Z = \frac{(\pi - p) + \Delta\,\mathrm{Cos}\,n}{x},$$

wo $\varDelta = 0$ den Weg des centralen Schattens, $\varDelta = m - \mu$ die südliche und nördliche Grenze des vollen Schattens, $\varDelta = m + \mu$ die südliche und nördliche Grenze des Halbschattens u. f. gibt.

Man findet so den Weg der Schattenaxe oder den Weg des centralen Schattens, wie folgt

Mittlere Zeit Paris	nördliche Breite	östliche Länge v. Paris
$7^h\ 35'$	$48^\circ\ 50'$	$0^h\ 4$
7 45	45 0	1 2
8 0	40 50	1 46
8 15	37 20	2 16
8 30	34 13	2 38
8 45	31 24	2 57
9 0	28 49	3 13
9 15	26 25	3 29
9 30	24 13	3 45
9 45	22 10	4 2
10 0	20 19	4 20
10 15	18 43	4 43
10 25	17 48	5 3

Um noch einige Puncte des Schattenweges anzugeben, so hat man für die südliche Grenze des Halbschattens

mittlere Zeit Paris	Breite		Länge von Paris
8^h 0′	+ 5° 11′	nördlich	$+1^h$ 33′ östlich
9 0	− 4 17	südlich	+2 31
10 0	−11 21		+3 27
11 0	−18 46		+5 30

Für die Orte, welche die Hälfte der Sonne als grösste Phase der Verfinsterung sehen, hat man

mittlere Zeit Paris	auf der Südseite des centralen Schattens		mittlere Zeit Paris	auf der Nordseite des centralen Schattens	
	Breite	Länge		Breite	Länge
7^h 15′	+33° 39′	-1^h 0′	8^h 12′	+72° 4′	$+0^h$ 49′
8 0	21 31	+1 47	8 30	60 47	2 50
9 0	11 53	+2 51	9 0	51 55	3 13
10 0	3 39	+3 46	10 0	43 44	6 13
11 0	0 8	+5 58	10 10	41 48	7 18

und diese Angaben reichen hin, den Weg des Schattens nach seiner ganzen Ausdehnung auf einer Karte zu verzeichnen.

6. §. Um eben so die Erscheinungen des Durchganges eines der unteren Planeten von der Sonne für alle Puncte der Oberfläche der Erde zu finden, wollen wir zuerst, wie oben Seite 288 bey den Sonnenfinsternissen, diese Erscheinungen für die Erde überhaupt suchen.

Ist nämlich wieder a, p, m, x die Rectascension, Poldistanz, Halbmesser und Horizontalparallaxe der Venus für die Zeit der geocentrischen Conjunction in Rectascension; und α, π, μ, ξ dieselben Grössen für die Sonne zu derselben Zeit, und da, dα, so wie dp, dπ die stündlichen Bewegungen beyder Gestirne in Rectascension und Poldistanz, so hat man für jede gegebene Zeit t nach der Conjunction

$$(f\,t\,\mathrm{Sin}\,\pi)^2 + (\pi - p + g\,t)^2 = \Delta^2,$$

$$\text{wo } f = \frac{da - d\alpha}{3600}, \text{ und } g = \frac{d\pi - dp}{3600},$$

und Δ die scheinbare Distanz der Mittelpuncte beyder

Gestirne für die Zeit t bezeichnet (t in Secunden ausgedrückt).

Ist daher wieder

$$\operatorname{tg} n = \frac{g}{f \operatorname{Sin} \pi},$$

so hat man

$$t = -(\pi - p) \frac{\operatorname{Sin}^2 n}{g} \pm \frac{\operatorname{Sin} n}{g} \sqrt{\Delta^2 - (\pi - p)^2 \operatorname{Cos}^2 n}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $\Delta = \mu \pm m$, so erhält man die Zeiten der äusseren und inneren Berührungen der Ränder, wie sie aus dem Mittelpuncte der Erde gesehen werden. Setzt man aber $\Delta = \mu \pm m + (x - \varepsilon)$, so erhält man die Zeiten der äusseren und inneren Berührungen, wie sie zuerst und zuletzt von der Oberfläche der Erde gesehen werden.

I. Um aber diejenigen Orte der Oberfläche der Erde zu finden, welche den Eintritt von allen zuerst und zuletzt sehen, wird man, wie Seite 295, bemerken, dass diesen Orten die Sonne eben auf- oder untergeht. Nennt man daher wieder $P = \pi - p$ die Differenz der Poldistanzen zur Zeit der Conjunction, φ die Polhöhe, und s den Stundenwinkel der Sonne, so hat man (wie Seite 296)

$$\operatorname{Sin} \omega = \frac{P \operatorname{Cos} n}{D},$$

$$\operatorname{Sin} \varphi = \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Sin} (\omega + n),$$

$$\operatorname{Cos} s = - \operatorname{Cotg} \pi \operatorname{tg} \varphi.$$

Setzt man in den letzten Ausdrücken

$$D = \mu + m + (x - \varepsilon),$$

so erhält man den Ort A, welcher den Eintritt vor allen zuerst, und, wegen dem doppelten Werth von ω, auch zugleich den Ort B, welcher den Austritt zuletzt sieht.

Setzt man aber

$$D = \mu + m - (x - \varepsilon),$$

so erhält man den Ort a, welcher den Eintritt zuletzt und den Ort b, welcher den Austritt zuerst sieht.

Ex. Für den Durchgang der Venus, am 5. Junius 1761, hat man aus den Tafeln folgende Elemente

mittl. Z. Par.	Sonne α	π	Venus geoc. a	p
14^h	74° 11′ 53″	67° 19′ 27″	74° 29′ 4″	67° 25′ 12″
17	74 19 36	67 18 41	74 24 13	67 27 27
20	74 27 20	67 17 55	74 19 22	67 29 43

$\mu = 947''$ $\quad\quad \varepsilon = 8.''4$

$m = 29$ $\quad\quad x = 29.6$

wahre Zeit = mittlerer Zeit + 1′ 52″.

Daraus folgt

Conjunction in Rectascension 18^h 6′ 2.″4 mittl. Zeit Paris

und für diese Zeit $a = \alpha = 74° \; 22' \; 26.''2$

$$p = 67 \; 28 \; 16.9$$
$$\pi = 67 \; 18 \; 24.1$$
$$P = \pi - p = -592.''8,$$

also auch

mittlere Zeit Paris	$(a - \alpha)$	$(a - \alpha) \operatorname{Sin} \pi$	$(\pi - p)$
14^h	$-1031''$	$-951''$	$-345''$
17	-277	-256	-526
20	$+478$	$+441$	-708

$d a = -97.''0$ $\quad\quad d\alpha = +154.''5$

$d p = +45.2$ $\quad\quad d\pi = -15.3$

$$f = \frac{d a - d \alpha}{3600} = -0.06986,$$

$$g = \frac{d \pi - d p}{3600} = -0.016805,$$

wo für $\operatorname{Sin} \pi$ im Mittel $\operatorname{Sin} \frac{\pi + p}{2} = \operatorname{Sin} 67° \; 23'$ angenommen wurde.

Es ist daher die Neigung der relativen Bahn

$$n = +14° \; 36' \; 22'',$$

$$\text{und } t = -(\pi - p)\frac{\operatorname{Sin}^2 n}{g} \pm \frac{\operatorname{Sin} n}{g} \sqrt{\Delta^2 - (\pi - p)^2 \operatorname{Cos}^2 n},$$

$$\text{oder } t = -2243.''2 \mp 15.00581 \sqrt{\Delta^2 - 329065.}$$

Diess vorausgesetzt, hat man für den **Mittelpunct** der Erde, äussere Berührung der Ränder

$\Delta = \mu + m = 976$ gibt $t = -\; 3^h 54' 52''$, und $+\; 2^h 40' 6''$

Conjunction	18 6 2	18 6 2
	Eintritt 14 11 10	Austritt 20 46 8

mittlere Zeit Paris.

Für die Oberfläche der Erde aber, und die äusseren Berührungen der Ränder hat man

$$D = \mu + m + (x - \varepsilon) = 997.''2 \text{, gibt}$$

	$t = -4^h\ 1'\ 25''$,	und	$+\ 2^h 46' 39''$
	18 6 2		18 6 2
erster Eintritt	14 4 37	letzter Austritt	20 52 41

mittlere Zeit Paris

für den Ort A, für den Ort B.

Eben so gibt

$$D = \mu + m - (x - \varepsilon) = 955''$$

	$t = -3^h\ 48'\ 20''$,	und	$+\ 2^h 33' 34''$
	18 6 2		18 6 2
letzter Eintritt	14 17 42	erster Austritt	20 39 36

mittlerer Zeit Paris

für den Ort a, für den Ort b.

Die Differenz der beyden Eintritte, oder auch der beyden Austritte für die Oberfläche der Erde gibt $\theta = 0^h\ 13.'5$, und $\frac{\theta}{2} = 6.54$ Zeitminuten.

Für diese Orte aber erhält man nach I.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\omega &= -\frac{592 \cdot 8 \operatorname{Cos} n}{D} \\ \operatorname{Sin}\varphi &= \operatorname{Sin} 67^\circ\ 23' \operatorname{Sin}(\omega + n) \\ \operatorname{Cos} s &= -\operatorname{Cotg} 67^\circ\ 23' \operatorname{tang}\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Ist also $D = \mu + m + (x - \varepsilon) = 997.''2$,

so ist $\omega = -35^\circ\ 7' = -144^\circ\ 53'$

$\varphi = -18^\circ\ 52'$	$\varphi = -\ 44^\circ\ 46'$ südl. Breite
$s =\ 81\ \ 49$	$s =\ 294\ \ 24$
$s =\ 5^h\ 27'\ 16''$ wahrer Ortszeit	$s =\ 19^h\ 37'\ 40''$
14 6 29 wahrer Zeit Paris	20 54 33
$\lambda =\ 15\ 20\ 47$	$\lambda = -\ 1\ 16\ 53$
östliche Länge von Paris,	westliche Länge von Paris,
für den Ort A,	für den Ort B.

Da die Orte a und b den A und B nahe diametral gegenüber liegen, so ist

$\varphi = 18^\circ\ 52'$	$\varphi = 44^\circ\ 46'$ nördlicher Breite
$\lambda = 3^h\ 20'\ 47''$	$\lambda = 11^h\ 43'\ 7''$ östlicher Länge von Paris
für den Ort a,	für den Ort b.

7. §. Es ist nun noch übrig, die Erscheinungen einer Sonnenfinsterniss, wie sie für einen gegebenen Ort der Erde Statt hat, durch Rechnung voraus zu bestimmen.

Man suche für zwey Zeiten T und T', die den nur beynahe bekannten Ortszeiten des Anfanges und des Endes der Finsterniss nahe liegen, die scheinbaren, d. h. von der Parallaxe veränderten Orte des Mondes und der Sonne. Seyen a, p, m die scheinbare Rectascension und Poldistanz, und der scheinbare Halbmesser des Mondes für die Zeit T, und a' p' m' für die Zeit T'. Für die Sonne seyen dieselben Grössen α, π, μ, und α', π', μ'. Sey ferner

$$A = (a - \alpha) \operatorname{Sin} \pi, \text{ und } A' = (a' - \alpha') \operatorname{Sin} \pi'$$
$$D = \pi - p, \qquad D' = \pi' - p',$$

so hat man für die relative stündliche Bewegung in scheinbarer Rectascension und Poldistanz die Ausdrücke

$$f = \frac{A' - A}{T' - T}, \text{ und } g = \frac{D' - D}{T' - T}.$$

Nennt man dann T + t die verbesserte Zeit des Anfangs, und T' + t' die verbesserte Zeit des Endes der Finsterniss, so findet man diese Verbesserungen t und t' durch die Gleichungen

$$(m \pm \mu)^2 = (A + f t)^2 + (D + g t)^2, \text{ und}$$
$$(m' \pm \mu')^2 = (A' + f t')^2 + (D' + g t')^2.$$

Jede dieser beyden Gleichungen gibt eigentlich zwey Werthe von t oder t', und man wird von ihnen den kleineren nehmen, da, nach der Voraussetzung, die Zeiten T und T' schon nahe richtig sind. Hat man keine vorläufige Kenntniss der Zeiten T und T', so wird man dafür eine willkürliche Zeit, z. B. von einer oder zwey Stunden vor und nach der Conjunction nehmen, und wenn die Correctionen t, t' zu gross werden, die Rechnung mit den verbesserten Werthen von T und T' wiederholen. Dass man statt den Rectascensionen und Poldistanzen a α p π auch die Längen und Ecliptik-Poldistanzen beyder Gestirne nehmen, und dass man bey der Sonne die Wirkung der Parallaxe ohne merklichen Fehler ganz vernachlässigen kann, ist für sich klar.

Die vorhergehende Methode ist genau, aber umständlich wegen der vorläufigen Berechnung der scheinbaren Orte für zwey Zeiten. Da man sich aber bey Rechnungen dieser

Art nur mit genäherten Resultaten begnügt, so wird man folgendes Verfahren vorziehen.

Man suche also für eine dem Anfange der Finsterniss für diesen Ort nahe Ortszeit T die wahre Rectascension und Poldistanz a p des Mondes und α π der Sonne. Ist x die Horizontalparallaxe des Mondes, so hat man für die Differenz der scheinbaren Rectascensionen und Poldistanzen die genäherten Ausdrücke (Seite 97)

$$A = (a - \alpha) \operatorname{Sin} \pi - x \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} s,$$

$$D = (\pi - p) - x \operatorname{Sin} \pi \frac{\operatorname{Sin}(\varphi - \omega)}{\operatorname{Cos} \omega},$$

$$\text{wo } \operatorname{tg} \omega = \operatorname{Cotg} \pi \operatorname{Cos} s,$$

und wo s der Stundenwinkel der Sonne, so wie φ die geocentrische Polhöhe des Ortes bezeichnet.

Für eine Zeit von θ Stunden später seyen diese Grössen A' und D', und endlich

$$f = \frac{A' - A}{\theta}, \text{ und } g = \frac{D' - D}{\theta}.$$

Nennt man dann die verbesserte Ortszeit T + t, so findet man die Correction t aus der Gleichung

$$(m \pm \mu)^2 = (A + f t)^2 + (D + g t)^2, \text{ oder aus}$$

$$(f^2 + g^2) t^2 + 2 (A f + D g) t = (m \pm \mu)^2 - A^2 - D^2,$$

und von dem so erhaltenen doppelten Werthe von t gehört der eine für den Anfang, und der andere für das Ende der partiellen Finsterniss, wenn man das obere, oder der totalen Finsterniss, wenn man das untere Zeichen in $(m \pm \mu)$ gewählt hat. Am einfachsten wird man die Grössen A, D, f, g und m, μ in Bogenminuten ausdrücken, die Correction t aber erhält man in Theilen der Stunde.

Ist dann Θ die so gefundene Zeit zwischen dem Anfange und dem Ende, oder ist Θ die Dauer der Finsterniss, und ist

$$R^2 = (m + \mu)^2 - \tfrac{1}{4} \Theta^2 (f^2 + g^2),$$

so ist die grösste Phase der Finsterniss gleich $\mu + m - R$.

Um noch den Punct der Sonne zu finden, in welchem die Finsterniss anfängt, oder aufhört, sey ν der Winkel des Declinationskreises der Sonne mit dem Vertikalkreise, der durch ihren Mittelpunct geht, so ist

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\operatorname{Sin} s}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{Sin} \pi - \operatorname{Cos} \pi \operatorname{Cos} s}.$$

Ist dann $a-\alpha$ und $\pi-p$ die Differenz der scheinbaren Rectascensionen und Poldistanzen zur Zeit des Anfanges oder des Endes der Finsterniss, und u der Winkel des Declinationskreises mit der Linie, welche die Mittelpuncte beyder Gestirne verbindet, so ist

$$\text{Cos}\, u = \frac{\pi - p}{m+\mu}, \text{ oder}$$

$$\text{Sin}\, u = \frac{(a-\alpha)\,\text{Sin}\,\pi}{m+\mu},$$

wo die Winkel ν und u, wenn sie positiv sind, vom Declinationskreise der Sonne gegen Osten gezählt werden; und daher der gesuchte Winkel W des Vertikalkreises der Sonne mit der die Mittelpuncte verbindenden geraden Linie,

$$W = u - \nu,$$

wo der gesuchte Berührungspunct östlich oder westlich von dem Scheitelkreise liegt, wenn W positiv oder negativ ist.

Wenden wir dieses auf die Sonnenfinsterniss des 9. Octobers 1847 an, deren Elemente wir oben (Seite 289) gegeben haben, und suchen wir die Erscheinungen dieser Finsterniss, wie sie für Wien Statt haben wird, so ist

Anfang beynahe	Ende	
6^h 25′	9^h 25′	mittlerer Zeit Paris
0 56.2	0 56.2	
7 21.2	10 21.2	mittlerer Zeit Wien
+ 12.5	12 5	Zeitgleichung
7 33.7	10 33.7	wahrer Zeit Wien,

also auch

$$s = -\ 4^h\ 26.'3 \qquad s = -\ 1^h\ 26.'3$$
$$-66^\circ\ 34.'5 \qquad -21^\circ\ 34.'5.$$

Für diese zwey Zeiten ist

$$a = 193^\circ\ 5'\ 10'' \qquad 194^\circ\ 30'\ 14''$$
$$p = 95\ \ 11\ \ 8 \qquad 95\ \ 37\ \ 55$$
$$x = 0\ \ 53.9 \qquad m = 14'.68$$
$$\varphi = 48\ \ 12\ \ 6 \qquad \mu = 16.06.$$

Es ist daher für den Anfang, wenn $\pi = 96^\circ$ genommen wird,

$$A = -28.'84 \qquad f = 19.'38$$
$$D = 10.07 \qquad g = -\ 8.62, \text{ und}$$

$$(30.74)^2 = (-28.84 + 19.38\,t)^2 + (10.07 - 8.62\,t)^2,$$

woraus der kleinere Werth von t folgt

$$t = -0^h.009 = -\ 0^h\quad 0.'54$$

$$\begin{array}{lrr} & 7 & 21.20 \\ \hline \text{verbesserter Anfang} & 7 & 20.66 \end{array}$$ mittlere Zeit Wien.

Der zweyte grössere Werth von t wird für das Ende der Finsterniss gelten. Doch ist es genauer, dasselbe eben so, wie den Anfang, besonders zu berechnen. Man erhält so

$$A = \quad 29.'26 \qquad f = \quad 19.'38$$
$$D = -15.81 \qquad g = -\ 8.62,$$ also auch

$$(30.74)^2 = (29.26 + 19.38\,t)^2 + (-15.81 - 8.62\,t)^2,$$

woraus der kleinere Werth von t folgt

$$t = -0^h.11 = -\ 0^h\quad 6.'6$$

$$\begin{array}{lrr} & 10 & 21.2 \\ \hline \text{verbessertes Ende} & 10 & 14.6 \end{array}$$ mittlere Zeit Wien.

Grösse der Verfinsterung 26.67 Minuten.

Nach der ersten genaueren Methode findet man Anfang der Finsterniss $7^h\ 21'\ 26''$, und Ende $10^h\ 13'\ 53''$ mittlerer Ortszeit, und eben so für

Prag Anfang $7^h\ 17'\ \ 4''$, Ende $10^h\ 9'\ 25''$
Berlin Anfang $7\ \ 15\ \ 55$, Ende $10\ \ 1\ \ 50$.

Kennt man aber bereits die Zeiten für drey ihrer geographischen Lage nach nicht sehr von einander entfernte Orte, so lassen sich daraus auch die Zeiten für andere, jenen nahe Orte durch eine leichte Rechnung ableiten. Ist nämlich t die Ortszeit des Anfanges oder des Endes der Finsterniss für den einen jener drey Orte, dessen Länge λ, und Polhöhe φ ist, und nennt man dieselben Grössen für den zweyten Ort $t'\ \lambda'\ \varphi'$, und für den dritten $t''\ \lambda''\ \varphi''$, so kann man annehmen, dass die Differenzen der Zeiten sich nahe wie die Differenzen der Länge und Breite dieser Orte verhalten, oder dass man hat

$$t' - t = A(\lambda' - \lambda) - B(\varphi' - \varphi)$$
$$t'' - t = A(\lambda'' - \lambda) - B(\varphi'' - \varphi).$$

Da aber in diesen beyden Ausdrücken alles, ausser A und B, bekannt ist, so wird man diese Grössen A und B daraus finden, und dann für jeden andern, jenen benachbarten Ort haben

$$T - t = A(\Lambda - \lambda) - B(\Phi - \varphi),$$

wo $\varLambda$ und $\varPhi$ die Länge und Breite des neuen Ortes, und T die gesuchte Zeit des Anfanges oder Endes der Finsterniss für diesen Ort ist. So ist z. B. für

	λ	φ	t Eintritt
Wien	$0^h.936$	$48^\circ.211$	$7^h.357$
Prag	0.805	50.089	7.284
Berlin	0.736	52.529	7.265

Substituirt man diese Werthe in den beyden vorhergehenden Gleichungen, so findet man

$$T = 0.647\,\varLambda + 0.006\,\varPhi + 6.444$$

für den Anfang der Finsterniss, und eben so für das Ende

$$T' = 0.307\,\varLambda - 0.045\,\varPhi + 12.164.$$

So ist z. B. für Ofen

$$\varLambda = 1^h.113, \quad \text{und} \quad \varPhi = 47^\circ.500, \text{ also}$$

$T = 7^h\ 26'\ 56''$ Anfang mittlerer Zeit Ofen
$T' = 10\ \ 22\ \ \ 8$ Ende - - -

für eine bloss genäherte Bestimmung in den meisten Fällen hinreichend, da man dadurch nur den Beobachter aufmerksam zu machen sucht, bey Zeiten an sein Instrument zu treten.

I. Setzt man die Summe oder Differenz der scheinbaren Halbmesser gleich ρ, so hat man nach dem Vorhergehenden, um die verbesserte Zeit $T + t$ des Anfanges oder Endes der Finsterniss zu finden, die Gleichung

$$\rho^2 = (A + f\,t)^2 + (D + g\,t)^2.$$

Diese Gleichung lässt sich bequem auflösen durch Einführung der Hülfsgrössen m, M, n, N, indem man setzt

$$A = m \operatorname{Sin} M, \qquad f = n \operatorname{Sin} N,$$
$$D = m \operatorname{Cos} M, \qquad g = n \operatorname{Cos} N.$$

Dann geht die Gleichung in folgende über:

$$\rho^2 = m^2 + n^2 t^2 + 2\,m\,n\,t \operatorname{Cos}(M - N),$$

woraus folgt

$$t = -\frac{m}{n}\operatorname{Cos}(M-N) \mp \sqrt{\frac{\rho^2}{n^2} - \frac{m^2}{n^2}\operatorname{Sin}^2(M-N)},$$

oder wenn man

$$\frac{m}{\rho}\operatorname{Sin}(M-N) = \operatorname{Cos}\psi \text{ setzt},$$

$$t = -\frac{m}{n}\operatorname{Cos}(M-N) \mp \frac{\rho}{n}\operatorname{Sin}\psi,$$

wo das obere Zeichen für den Anfang, das untere für das Ende gilt, vorausgesetzt, dass man $\psi < 180°$ genommen hat, was immer geschehen kann.

Für den Winkel u zwischen dem Declinationskreis der Sonne und der Linie, welche die Mittelpuncte beyder Gestirne verbindet, positiv genommen, wenn der Mond östlich von der Sonne ist, hat man nach dem Obigen die Gleichungen:

$$\text{Sin } u = \frac{A + f t}{\rho},$$
$$\text{Cos } u = \frac{D + g t}{\rho}.$$

Führt man auch hier die Hülfsgrössen m, M u. s. w. ein, und substituirt man für t den so eben gefundenen Werth, so erhält man

$$\rho \text{ Sin } u = m (\text{Sin } M - \text{Sin } N \text{ Cos } (M - N)) \mp \rho \text{ Sin } N \text{ Sin } \psi,$$
$$\rho \text{ Cos } u = m (\text{Cos } M - \text{Cos } N \text{ Cos } (M - N)) \mp \rho \text{ Cos } N \text{ Sin } \psi,$$

oder

$$\rho \text{ Sin } u = \quad m \text{ Sin } (M - N) \text{ Cos } N \mp \rho \text{ Sin } N \text{ Sin } \psi,$$
$$\rho \text{ Cos } u = - m \text{ Sin } (M - N) \text{ Sin } N \mp \rho \text{ Cos } N \text{ Sin } \psi,$$

oder, da $m \text{ Sin } (M - N) = \rho \text{ Cos } \psi$ ist,

$$\text{Sin } u = \quad \text{Cos } (N \pm \psi),$$
$$\text{Cos } u = - \text{Sin } (N \pm \psi),$$

woraus folgt $u = N \pm \psi + 90°$.

8. §. Das von den Sonnenfinsternissen Gesagte lässt sich, mit wenigen Abänderungen, auch auf Sternbedeckungen vom Monde anwenden. Übrigens wird es gut seyn, noch eine Methode der Vorausberechnung der Sternbedeckungen kennen zu lernen. (Astronomische Nachrichten Nro. 145.)

Es sey A, D die scheinbare Rectascension und Declination des bedeckten Fixsterns; α, δ die wahre, und α', δ' die scheinbare Rectascension und Declination des Mondes, ρ sein geocentrischer, ρ' sein scheinbarer Halbmesser, ϖ seine Äquatorial-Horizontalparallaxe; μ die Rectascension des Zeniths oder die in Grade u. s. w. verwandelte Sternzeit, φ die durch Beobachtungen gegebene, φ' die geocentrische Polhöhe, r das Verhältniss der Entfernung des Beobach-

tungsortes vom Mittelpunct der Erde zum Halbmesser des Äquators.

Das sphärische Dreyeck N L S zwischen dem Nordpol N des Äquators, dem Mittelpuncte L des Mondes und dem Sterne S gibt, wenn L S durch Σ, und der Winkel N S L, von o bis 360° gezählt, durch P bezeichnet wird, (so dass P zwischen o und 180° ist, wenn $\alpha' < A$, zwischen 180° und 360°, wenn $\alpha' > A$ ist), folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin}\,\Sigma\,\text{Sin}\,P &= -\text{Cos}\,\delta'\,\text{Sin}\,(\alpha' - A), \\ \text{Sin}\,\Sigma\,\text{Cos}\,P &= \quad \text{Sin}\,\delta'\,\text{Cos}\,D - \text{Cos}\,\delta'\,\text{Sin}\,D\,\text{Cos}\,(\alpha' - A) \end{aligned}\right\} (I).$$

Aber der scheinbare Ort des Mondes wird durch den wahren ausgedrückt mittelst folgender Gleichungen (S. 96), in welchen $\varDelta$ das Verhältniss der Entfernung des Mondes von dem Beobachtungsorte zu seiner Entfernung vom Mittelpunct der Erde bezeichnet:

$$\begin{aligned} \varDelta\,\text{Cos}\,\delta'\,\text{Sin}\,(\alpha' - A) &= \text{Cos}\,\delta\,\text{Sin}\,(\alpha - A) \\ &\quad - r\,\text{Sin}\,\varpi\,\text{Cos}\,\varphi'\,\text{Sin}\,(\mu - A), \\ \varDelta\,\text{Cos}\,\delta'\,\text{Cos}\,(\alpha' - A) &= \text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}\,(\alpha - A) \\ &\quad - r\,\text{Sin}\,\varpi\,\text{Cos}\,\varphi'\,\text{Cos}\,(\mu - A), \\ \varDelta\,\text{Sin}\,\delta' &= \text{Sin}\,\delta - r\,\text{Sin}\,\varpi\,\text{Sin}\,\varphi'. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den Gleichungen (I), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\,\text{Sin}\,\Sigma\,\text{Sin}\,P &= -\text{Cos}\,\delta\,\text{Sin}\,(\alpha - A) \\ &\quad + r\,\text{Sin}\,\varpi\,\text{Cos}\,\varphi'\,\text{Sin}\,(\mu - A), \\ \varDelta\,\text{Sin}\,\Sigma\,\text{Cos}\,P &= \quad \text{Sin}\,\delta\,\text{Cos}\,D - \text{Cos}\,\delta\,\text{Sin}\,D\,\text{Cos}\,(\alpha - A) \\ &\quad - r\,\text{Sin}\,\varpi\,[\text{Sin}\,\varphi'\,\text{Cos}\,D - \text{Cos}\,\varphi'\,\text{Sin}\,D\,\text{Cos}\,(\mu - A)] \end{aligned}\right\} (II).$$

Für den Anfang oder das Ende einer Sternbedeckung ist $\Sigma = \rho'$, und man hat (nach S. 92)

$$\varDelta\,\text{Sin}\,\rho' = \text{Sin}\,\rho,$$

also auch

$$\varDelta\,\text{Sin}\,\Sigma = \text{Sin}\,\rho.$$

Da Sin ρ und Sin ϖ beyde der Entfernung des Mondes vom Mittelpunct der Erde umgekehrt proportional sind, so kann man setzen Sin $\rho = k$ Sin ϖ, wo die Constante k nach Burckharts Mondstafeln $= 0.2725$, ihr Logarithme $= 9.4353665$ ist.

Setzt man demnach in den Gleichungen (II)

$$\varDelta\,\text{Sin}\,\Sigma = k\,\text{Sin}\,\varpi,$$

so gehen sie in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} k \operatorname{Sin} P &= -\frac{\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}(\alpha - A)}{\operatorname{Sin}\varpi} + r \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin}(\mu - A), \\ k \operatorname{Cos} P &= \frac{\operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos} D - \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin} D \operatorname{Cos}(\alpha - A)}{\operatorname{Sin}\varpi} \\ &\quad - r[\operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos} D - \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin} D \operatorname{Cos}(\mu - A)] \end{aligned}\right\} \text{(III).}$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} k^2 &= \left\{\frac{\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}(\alpha - A)}{\operatorname{Sin}\varpi} - r \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin}(\mu - A)\right\}^2 \\ &+ \left\{\begin{aligned} &\frac{\operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos} D - \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin} D \operatorname{Cos}(\alpha - A)}{\operatorname{Sin}\varpi} \\ &- r[\operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos} D - \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin} D \operatorname{Cos}(\mu - A)] \end{aligned}\right\}^2 \text{(IV).} \end{aligned}$$

Für eine Zeit T, welche der gesuchten Zeit $T + t$ des Eintritts oder Austritts des Sterns nahe liegt, sey der Werth von

$$\frac{\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}(\alpha - A)}{\operatorname{Sin}\varpi} = p,$$

$$\frac{\operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos} D - \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin} D \operatorname{Cos}(\alpha - A)}{\operatorname{Sin}\varpi} = q,$$

$$r \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin}(\mu - A) = u,$$

$$r \operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos} D - r \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin} D \operatorname{Cos}(\mu - A) = v;$$

für die Zeit $T + t$ seyen die Werthe derselben Grössen $p + p't$, $q + q't$, $u + u't$, $v + v't$; so wird die Gleichung (IV)

$$k^2 = [p - u + (p' - u')t]^2 + [q - v + (q' - v')t]^2.$$

Setzt man

$$p - u = m \operatorname{Sin} M, \quad p' - u' = n \operatorname{Sin} N,$$

$$q - v = m \operatorname{Cos} M, \quad q' - v' = n \operatorname{Cos} N,$$

$$\text{und } \frac{m}{k} \operatorname{Sin}(M - N) = \operatorname{Cos}\psi,$$

so erhält man, wie in §. 7, I., die gesuchte Correction

$$t = -\frac{m}{n} \operatorname{Cos}(M - N) \mp \frac{k}{n} \operatorname{Sin}\psi \;\ldots\ldots\; \text{(V)},$$

wo das obere Zeichen für den Eintritt, das untere für den Austritt gilt.

Um den Winkel P zu finden, hat man vermöge der Gleichungen (III)

$$k \operatorname{Sin} P = -(p - u) - (p' - u')t,$$

$$k \operatorname{Cos} P = \quad (q - v) + (q' - v')t,$$

woraus, wie in §. 7, I, folgt:

$$\text{Sin P} = -\text{Cos}(\text{N} \pm \psi),$$
$$\text{Cos P} = -\text{Sin}(\text{N} \pm \psi),$$
$$\text{also P} = 270° - \text{N} \mp \psi.$$

Will man den Ort des Eintritts und Austritts durch den Winkel, welchen die vom Mittelpuncte des Mondes nach dem Sterne und dem Nordpole gezogenen grössten Kreise einschliessen, von Norden links herum gezählt, angeben, so hat man, da das Dreyeck NLS beynahe gleichschenkelig ist, diesen Winkel sehr nahe

$$Q = 180° - P = N \pm \psi - 90° \ldots\ldots (VI).$$

Da bey diesen Rechnungen gewöhnlich keine grosse Schärfe verlangt wird, so kann man setzen:

$$p = \frac{\alpha - A}{\varpi} \text{Cos}\,\delta; \qquad p' = \frac{\Delta\alpha}{\varpi} \text{Cos}\,\delta;$$
$$q = \frac{\delta - D}{\varpi} \qquad\qquad q' = \frac{\Delta\delta}{\varpi};$$

wo α, δ die Rectascension und Declination des Mondes zur Zeit T, und $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ ihre stündlichen Änderungen bezeichnen.

Ist ferner μ die Rectascension des Zeniths für die mittlere Zeit T, $\Delta\mu$ die Änderung derselben in 1^h mittlerer Zeit, und $\lambda = \Delta\mu$ Sin 1″, wo $\Delta\mu = 15°.04107$ (siehe Seite 51) $= 54147''.85$, also Log $\lambda = 9.4192$ ist, so hat man

$$u = r\,\text{Cos}\,\varphi'\,\text{Sin}(\mu - A),$$
$$v = r\,\text{Sin}\,\varphi'\,\text{Cos D} - r\,\text{Cos}\,\varphi'\,\text{Sin D Cos}(\mu - A),$$
$$u' = r\,\text{Cos}\,\varphi'.\lambda\,\text{Cos}(\mu - A),$$
$$v' = r\,\text{Cos}\,\varphi'.\lambda\,\text{Sin}(\mu - A)\,\text{Sin D}.$$

Setzt man

$$a = r\,\text{Cos}\,\varphi'\,\text{Sin}(\mu - A),$$
$$b = r\,\text{Cos}\,\varphi'\,\text{Cos}(\mu - A),$$
$$c = r\,\text{Sin}\,\varphi'\,\text{Cos D}, \text{ so ist}$$
$$u = a \qquad\qquad u' = b.\lambda,$$
$$v = c - b\,\text{Sin D}, \qquad v' = a.\lambda\,\text{Sin D}.$$

Substituirt man diese Werthe von p, u u. s. w. in den obigen Ausdrücken für die Hülfsgrössen m, M u. s. w., so findet man t und Q vermittelst der Gleichungen (V) und (VI).

Enckes Jahrbuch gibt vom Jahre 1831 an bey jeder Sternbedeckung für eine dem Zeitpunct der kleinsten Entfernung nahe Berliner Zeit T die Werthe von p, q, p′, q′,

welche in der Rechnung für einen andern Ort ungeändert bleiben, ferner den Stundenwinkel des Sterns $h = \mu - A$, welcher sich für einen andern Ort in $h + d$ verwandelt, wenn d die östlich positiv genommene Länge des Ortes von Berlin bezeichnet, so dass man für diesen Ort hat

$$a = r \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} (h + d),$$
$$b = r \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Cos} (h + d),$$

Führt man mit diesen Werthen die Rechnung aus, so geben die beyden Werthe von t die Berliner mittleren Zeiten, zu welchen der Ein- und Austritt an dem Orte, für welchen gerechnet worden ist, Statt hat; und daraus findet man vermittelst der bekannten Längendifferenz die Ortszeiten.

Beyspiel. Für die Bedeckung von 82 Leonis am 5. April 1830 hat man um 7^h Berliner Zeit

$$p = + 0.6656 \quad p' = + 0.5242 \qquad h = - 50° 42':$$
$$q = + 0.5523 \quad q' = - 0.1638$$

Man soll die Zeit und den Ort des Eintritts und des Austritts für Altona finden.

Für Altona ist

$\operatorname{Log} r \operatorname{Cos} \varphi' = 9.77485$, $\operatorname{Log} r \operatorname{Sin} \varphi' = 9.90349$, $d = - 3° 27'$
$D = 4° \; 14'.08$.

Daraus folgt

$$u = - 0.4827 \qquad u' = + 0.0916$$
$$v = + 0.7728 \qquad v' = - 0.0094$$
$$M = 219° \; 40' \qquad \operatorname{Log} m = 9.4571 \qquad \psi = 9° \; 1'$$
$$N = 109° \; 39' \qquad \operatorname{Log} n = 9.6621$$
$$t = + 0^h.214 \mp 0.093$$

	Eintritt	Austritt	
	$7^h \; 7'.3$	$7^h \; 18'.4$	Berliner Zeit
oder	6 53 .5	7 4 .6	Altonaer Zeit
Q =	28°.7	10°. 6.	

Vorlesung VIII.

Berechnung der Planetenbeobachtungen.

1. §. Die Beobachtung der Planeten hat zum Zwecke, den beobachteten Ort derselben mit demjenigen zu vergleichen, der durch die Elemente oder durch die auf diese Elemente gebauten Planetentafeln gegeben wird, und dadurch diese Elemente oder diese Tafeln selbst immer mehr zu verbessern. Da diess eines der wichtigsten Geschäfte des praktischen Astronomen ist, so werden wir hier das dabey zu beobachtende Verfahren näher anzeigen.

Zuerst müssen wir die gewöhnliche Einrichtung der Planetentafeln kennen lernen, von welchen in der Sammlung am Ende dieses Werkes bloss als Beyspiele die der Sonne und der Venus aufgenommen wurden, daher drey Decimalstellen des Grades genügten. Genauer und für alle Fälle hinreichend werden vier Decimalstellen seyn, wobey man nämlich die sehr kleine Grösse $0^\circ.00005 = 0''.28$ vernachlässiget. Zur Erläuterung ihres Gebrauches wollen wir die Sonnentafeln wählen.

Die erste Tafel enthält die Epochen oder die mittleren Längen für die einzelnen Jahre, und zwar für den mittleren Mittag Wiens des ersten Januars jedes Jahres, wenn dasselbe ein Schaltjahr ist, oder für den 0ten Januar (d. h. für den 31. December des vorhergehenden Jahres), wenn das gegenwärtige ein gemeines Jahr ist.

Die mittlere Länge der Sonne für den mittleren Mittag Wiens am 1. Januar 1828 ist $280^\circ.075104$ und die mittlere tägliche Bewegung $0^\circ.985647182$, also auch die Bewegung in 365 Tagen $359^\circ.7612214$ und in 366 Tagen $360^\circ.7468686$.

Eben so ist die Länge des Apogeums der Sonnen-

bahn oder des Periheliums der Erdbahn für den 1. Januar 1828 gleich 99°.954444 und die Bewegung desselben in einem Jahre von $365\frac{1}{4}$ Tagen gleich 0°.017222.

Daraus erklären sich von selbst die drey ersten senkrechten Columnen der Sonnentafeln für die Jahre, Monate, Tage und Stunden. Man muss aber bemerken, dass man, wenn das gegebene Jahr ein Schaltjahr ist, in den Columnen der einzelnen Monatstage, aber bloss für die beyden Monate Januar und Februar, einen Tag weniger, also z. B. den 19. Februar nehmen muss, wenn man die Länge der Sonne für den 20. Februar eines Schaltjahrs sucht. Die übrigen Columnen enthalten die Argumente der Störungen, welche die Planeten auf die Erde äussern. Wird der grössern Einfachheit wegen die Peripherie des ganzen Kreises (statt 360 Graden) in 1000 gleiche Theile getheilt, und bezeichnet man die Länge des Mondes, der Venus, der Erde, des Mars und Jupiters in derselben Ordnung durch die Zeichen

☾, ♀, ♁, ♂ und ♃, so ist

A = ♁ − ☾, B = ♀ − ♁, C = ♁ − ♂, D = ♁ − ♃, E = ♀ − ♁,
F = 2♂ − ♁, G = ♃ und H = 3♀ − 4♁.

Kennt man so die mittlere Länge der Sonne für irgend eine gegebene Zeit, so wird man dazu die Gleichung der Bahn und die Störungen der Länge setzen, um die wahre Länge der Sonne zu erhalten. Die Tafel der Gleichung der Bahn ist nach der Gleichung berechnet worden (S. 62)

— 1°.92432 Sin M + 0°.02019 Sin 2 M — 0.00029 Sin 3 M,

wo M die mittlere Anomalie der Sonne oder die mittlere Länge der Sonne weniger der Länge des Apogeums ist.

Den Tafeln der Längenstörungen aber liegen folgende Gleichungen zu Grunde,

A...+ 0°.0021 Sin (♁ — ☾)
B...+ 0 .0016 Sin (♀ — ♁) — 0.0018 Sin 2(♀ — ♁)
C...— 0 .0007 Sin 2(♁ — ♂)
D...— 0 .0021 Sin (♁ — ♃) + 0.0008 Sin 2(♁ — ♃)
E...+ 0 .0008 Cos 2(♀ — ♁)
F...+ 0 .0004 Sin (2♂ — ♁) + 0.0004 Cos (2♂ — ♁)
G...— 0 .0007 Sin ♃
H...+ 0 .0006 Cos (3♀ — 4♁).

Bezeichnet endlich ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondesbahn, so ist (S. 75) die Nutation der Sonne in Länge $0^\circ.00466$ Sin ☊ und in Rectascension $0^\circ.00427$ Sin ☊, wornach die zwey letzten Columnen der Störungen berechnet wurden.

Man bemerke noch, dass die durch die Tafeln gegebenen mittleren Längen der Sonne schon die constante Aberration $20''.25 = 0^\circ.0056$ enthalten, oder. um diese Grösse zu klein sind, daher man, um die von der Aberration befreyte Länge der Sonne zu erhalten, zu der tabellarischen Länge derselben noch $0^\circ.0056$ addiren muss.

Die folgende Abtheilung der Sonnentafeln enthält den elliptischen Radius Vector nach der Gleichung (S. 60)

$$1.000141 + 0.016790 \, \text{Cos}\, M - 0.000141 \, \text{Cos}\, 2M + 0.000002 \, \text{Cos}\, 3M,$$

und die Störungen desselben nach den Ausdrücken

A...+ 0.00004 Cos (180 + ♅ − ☾)
B...− 0.00001 Cos (♀ − ♅) + 0.00002 Cos 2 (♀ − ♅)
C...+ 0.00001 Cos 2 (♅ − ♂)
D...+ 0.00002 Cos (♅ − ♃) − 0.00001 Cos 2 (♅ − ♃)

Die Tafeln der Venus sind im Allgemeinen eben so eingerichtet, und bedürfen daher keiner eigenen Erklärung. Die heliocentrische Breite und die Reduction auf die Ecliptik ist nach den Gleichungen (S. 115) in die Tafeln gebracht worden.

2. §. Es ist nur noch übrig, durch einige Beyspiele den Gebrauch dieser Tafeln zu zeigen.

Man suche den wahren Ort der Sonne für 1829 den 9. August $0^h\, 5'\, 12''$ mittlere Zeit Greenwich, oder (da Greenwich $1^h\, 5'\, 31''$ westlich von Wien ist) für $1^h\, 10'\, 43''$ mittlere Zeit Wien.

	mittlere Länge	Apog.	A	B	C	D	E	F	G	H	☊
1829	279°.836	99°.972	833	265	212	602	253	854	674	518	466
0 Aug.	208 .957	0 .010	179	363	271	531	146	37	49	509	31
9	8 .871	99 .982	305	15	11	23	399	891	723	27	497
1^h	0 .041	137 .713	1	643	494	156					
10′	0 .007	37 . 731 = M	318								
43″	0 .001	mittl. Anomalie									
	137 .713 mittl. Länge										

—1 .158 Gleichung der Bahn
1 . . . . Correction
2 . . . . A
— 3 . . . . B
0 C
— 1 . . . . D
— 1 . . . . E
0 . . . . F
1 . . . . G
1 . . . . H
0 . . . . ☊ Nutat. Länge

☉ = 136°.555 wahre Länge der Sonne.

Rad. Vector
1.01339
— 1 Correction
— 1 A
0 B
1 C
1 D

R = 1.01339.

Ist dann $\varDelta = 0°26697$ der Halbmesser der Sonne für die mittlere Entfernung derselben von der Erde, so ist für jede andere Entfernung der Halbmesser

$$\varDelta' = \frac{\Delta}{R} = \frac{\Delta}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos} M}, \text{ wo } \varepsilon = 0.016780 \text{ ist.}$$

Ist $m = 0°.04107$ die mittlere stündliche Bewegung der Sonne, so ist für jeden Ort derselben die wahre stündliche Bewegung der Sonne gleich

$$\frac{m\sqrt{1-\varepsilon^2}}{R^2} = \frac{0.99986\, m}{R^2}.$$

Ist $\varpi = 0°.00238$ die Horizontalparallaxe der Sonne für die mittlere Entfernung, so ist für jeden Tag des Jahres die Horizontalparallaxe $= \frac{\varpi}{R}$ und die Höhenparallaxe $= \frac{\varpi}{R} \operatorname{Sin} z$ wo z die Zenithdistanz der Sonne bezeichnet (S. 93).

Die Rectascension A und Poldistanz P der Sonne findet man aus der wahren Länge ☉ und der scheinbaren Schiefe e der Ecliptik durch die Gleichungen (S. 31)

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \odot \operatorname{Cos} e \text{ und } \operatorname{Cos} P = \operatorname{Sin} \odot \operatorname{Sin} e$$
$$\text{oder } \operatorname{Cotg} P = \operatorname{Sin} A \operatorname{tg} e$$

Aus der ersten dieser Gleichungen findet man auch (Seite 65)

$$A = \odot - \operatorname{tg}^2 \frac{e}{2} \cdot \operatorname{Sin} 2\odot + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{e}{2} \cdot \operatorname{Sin} 4\odot - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^6 \frac{e}{2} \cdot \operatorname{Sin} 6\odot + .$$

Die scheinbare Schiefe der Ecliptik ist endlich (S. 77)

$$e = 23° 27' 53''8 - 0''.48368 (T - 1800) + 8''.977 \operatorname{Cos} \Omega$$

Für unser Beyspiel ist

$$\Omega = 497 \frac{(360)}{1000} = 178° 54', \; e = 23° 27' 30''.5,$$

und $\odot = 136° 33' 18''$, also auch

der wahre Halbmesser der Sonne	$\varDelta' = 0°.26344$
die wahre stündliche Bewegung	$= 0°.039986$
die Horizontalparallaxe	$= 0°.002348$
wahre Rectascension	$A = 139° 0' 50''3 = 9^h 16' 3''.35$
wahre Poldistanz	$P = 74° 6' 45''.8.$

Weiter ist (Seite 65), wenn L die mittlere Länge der Sonne bezeichnet

$$\text{wahre Zeit} = \text{Sternzeit} - \frac{1}{15} A,$$

$$\text{mittlere Zeit} = \text{Sternzeit} - \frac{1}{15} L, \text{ und daher}$$

$$\text{mittlere Zeit} = \text{wahre Zeit} + \frac{A - L}{15},$$

wo $\frac{A-L}{15}$ die Zeitgleichung heisst.

In unserem Beyspiele ist.

$$L = 137^\circ\ 42'\ 46''.8$$
$$A = 139\ \ 0\ \ 50\ .3$$
$$A - L = +1^\circ\ 18'\ \ 3''.5 \text{ also}$$
$$\text{mittlere Zeit} = \text{wahre Zeit} + 0^h\ 5'\ 12''.23.$$

3. §. Auf eine ähnliche Art werden auch die Tafeln der Venus gebraucht. Um hier alle Störungen der Länge und des Radius Vectors positiv zu erhalten, wird man von der gefundenen wahren Länge der Venus die Constante 0°012 und von dem Radius Vector die Constante 0.00004 abziehen. Ein Beyspiel für dieselbe Zeit (1829 den 9. August 1^h 10′ 43 mittlerer Zeit Wien) wird den Gebrauch dieser Tafeln deutlich machen.

	mittlere Länge	Aphel.	Knoten	A	B	C	D	E	F	G	H
1829	195°.255	309.097	75.146	735	130	747	216	673	759	654	702
0 Aug.	339.660	7	5	637	106	854	128	49	71	982	102
9 Aug.	14.420	309.104	75.151	985	962	994	963	2	3	999	4
1^h	67	189.414	190.095	357	198	595	307	724	833	635	808
$10'$	11	240.310	114.944								
$43''$	1	mittl. Anomalie	Arg. d. Breite								
	189°.414										

\+ 0 .686 Gleichung der Bahn
— 3....Correction
3....A
2....B
2....C
1....D
1....E
1....F
0....G
0....H

190.107
—0.012...Const.

190.095 wahre Länge in der Bahn
+0.038 Reduction

190.133 wahre Länge in der Ecliptik.

Rad. Vector
0.72090
1 Correction
1 A
1 B

0.72093
— 4...Const.

r = 0.72089

Breite = + 3°.074.
Reduction = + 0°.038

Nennt man dann ρ die Distanz der Venus von der Erde, in Theilen der halben grossen Axe der Erdbahn ausgedrückt, so ist der scheinbare geocentrische Halbmesser der Venus

$$\frac{8.''3}{\rho},$$

und die Horizontalparallaxe derselben

$$\frac{8.''5}{\rho}.$$

4. §. Es ist also, wie man sieht, mit Hülfe solcher Tafeln sehr leicht, den heliocentrischen Ort der Sonne und der Planeten für jede gegebene Zeit zu finden. Wenn man aber, wie dieses bey den vier neuen Planeten, und besonders bey den Kometen, der Fall ist, noch keine solchen Tafeln hat, so muss der gesuchte heliocentrische Ort unmittelbar aus den gegebenen Elementen entwickelt werden. Um auch dieses durch Beyspiele deutlich zu machen, wollen wir den heliocentrischen Ort der Ceres für 1810 den 30. März 8^h $29'$ $16.''4$ mittlerer Zeit Wien suchen, und unserer Rechnung folgende Elemente zum Grunde legen.

Die Epoche der Ceres für den Anfang d. J. 1809, und für den Meridian von Göttingen, d. h. also die mittlere Länge der Ceres für den mittleren Mittag Göttingens des 31. Decembers 1808 ist gleich 343° $2'$ $33.''4$,

mittlere tropische Bewegung in 365 Tagen	78°	9′	46.″9
in einem Tage	0	12	50.923
Länge des Perihels für dieselbe Zeit	146	42	10.7
jährliche tropische Bewegung des Perihels	+	2	1.3
Excentricität ε			0.078485
jährliche Abnahme			0.0000058
halbe grosse Axe a			2.767251
Länge des aufsteigenden Knotens k	80	53	45.7
jährliche tropische Bewegung			+ 1.5
Neigung der Bahn	10	37	29.9
jährliche Abnahme			0.4

Da Göttingen 0^h $25'$ $49''$ westlich von Wien liegt, so ist die gesuchte mittlere Zeit Göttingens $8^h\,29'\,16.''4 - 0^h\,25'\,49.''0 = 8^h\,3'\,27.''4$. Von dem Mittage des 31. Decembers 1808 bis zu dem Mittage des 31. Decembers 1809 sind 365 Tage,

und von da bis zu dem 30. März $8^h\,3'\,27.''4$ noch $89.^T\,8^h\,3'\,27.''4$, oder 89.33573 Tage verflossen.

Mittlere tropische Bewegung der Ceres in 365 Tagen	78°	9′	46.″9
in $89.^T33573$	19	7	51.0
	97	17	37.9
Epoche für 1809	343	2	33.4
also für die gegebene Zeit mittlere Länge der Ceres	80	20	11.3
Länge des Perihels für dieselbe Zeit	146	44	41.7
mittlere Anomalie	293	35	29.6 = m.

Für dieselbe Zeit findet man aus den vorhergehenden Elementen

$$\varepsilon = 0.078478$$
$$n = 10°\ 37'\ 29.''3$$
$$k = 80\ \ 53\ \ 47.6.$$

Ist nun ω die excentrische, ν die wahre Anomalie, und r der Radius Vector, so hat man (Seite 56)

$$m = \omega - \varepsilon \operatorname{Sin} \omega,\ \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}},\ \text{und}$$

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \operatorname{Cos} \nu},$$

woraus man findet

$$\omega = 289°\ 20'\ 56.''6$$
$$\nu = 285\ \ 2\ \ 45.6$$
$$r = 2.695299,$$

und für das Argument der Breite $u = \nu - k +$ Länge des Perihels, oder $u = 350°\ 53'\ 39.''7$.

5. §. Eben so wird man für Kometen verfahren, wenn die elliptischen Elemente derselben gegeben sind. Hat man aber, wie gewöhnlich, nur die parabolischen Elemente einer Kometenbahn, so findet man die wahre Anomalie ν des Kometen für jede gegebene Zeit von t Tagen nach dem Durchgange des Kometen durch das Perihelium, durch die Gleichungen (Seite 64)

$$\operatorname{tg} x = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{3\mu t},\ \operatorname{tg} y = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{x}{2}},\ \text{und}\ \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = 2 \operatorname{Cotg} 2y,$$

wo p der halbe Parameter, und $\mu = 0.0172021$ ist.

Kennt man so ν, so ist der Radius Vector

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{\operatorname{Cos}^2 \frac{\nu}{2}}.$$

Für den Kometen von 1807 hat man
Durchgang durch die Sonnennähe 1807,
den 20. September 11^h 3′ 40″ mittlere Zeit Wien.
Länge der Sonnennähe 274° 55′ 10″
Halber Parameter $p = 1.348824$
Länge des Knotens $k = 264°\ 27'\ 28''$
Neigung $n = 61\ \ 59\ \ 44$ Bewegung direct.

Sucht man daraus den Ort des Kometen für den 15. October 7^h 24′ 16″ mittlerer Zeit Wien, so ist
$t = 24^T\ 20^h\ 20'\ 36'' = 24^T.84764$, und daher
$x = 50°\ 41'\ 50.''4$, $y = 37°\ 56'\ 17.''9$, und $\nu = 53°\ 25'\ 33.''8$
$r = 0.845202$, und das Argument der Breite
$u = \nu - k +$ Länge des Perihels $= 63°\ 53'\ 15.''8$.

6. §. Kennt man so den heliocentrischen Ort des Himmelskörpers, so findet man daraus die geocentrische Länge und Ecliptik-Poldistanz durch die Gleichungen der Seite 117.

Ist nämlich l und p die heliocentrische auf die Ecliptik reducirte Länge und die Poldistanz des Planeten, so hat man

$$\operatorname{tg}(l - k) = \operatorname{Cos} n \operatorname{tg} u, \text{ und}$$

$$\operatorname{Cos} p = \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} u.$$

Nennt man eben so λ und π die geocentrische, oder von dem Mittelpuncte der Erde gesehene Länge und Poldistanz des Planeten, und ρ die Entfernung desselben von der Erde, so sucht man zuerst (wie in §. 2.) für die gegebene Zeit die wahre Länge ☉ der Sonne, und ihre Entfernung R von der Erde, und setzt $L = 180°\ 0'\ 20.''25 + ☉$. Dann findet man die Grössen λ, π und ρ aus den Gleichungen (Seite 117)

$$\operatorname{tg}(\lambda - \tfrac{1}{2}(l + L)) = \frac{r \operatorname{Sin} p + R}{r \operatorname{Sin} p - R} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(l - L),$$

$$\rho' = (r \operatorname{Sin} p + R) \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(l - L)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\lambda - (l + L))},$$

$$\operatorname{Cotg} \pi = \frac{r \operatorname{Cos} p}{\rho'}, \text{ und}$$

$$\rho = \frac{\rho'}{\operatorname{Sin} \pi}.$$

So war in unserem Beyspiele für die Ceres 1810 den 30. März $8^h\ 29'\ 16.''4$ mittlere Zeit Wien,

Das Argument der Breite	$u = 350^\circ\ 53'\ 39.''7$
der Radius Vector	$r = 2.695299$
Neigung der Bahn	$n = 10\ \ 37\ \ 29.3$
Länge des Knotens	$k = 80\ \ 53\ \ 47.6$
also ist auch	
heliocentrische reducirte Länge der Ceres	$l = 71\ \ 56\ \ 40.1$
heliocentrische Poldistanz	$p = 91\ \ 40\ \ 19.4$

Allein für dieselbe Zeit geben die Sonnentafeln

$$\odot = 9^\circ\ 26'\ 22.''6, \quad \text{oder} \quad L = 189^\circ\ 26'\ 42.''8,$$

und $R = 0.9996534$, also ist die

wahre geocentrische Länge der Ceres	$\lambda = 56^\circ\ 15'\ 1.''0$
wahre geocentrische Poldistanz	$\pi = 91\ \ 22\ \ 27.8$
Entfernung von der Erde	$\rho = 3.27890$

7. §. Die so erhaltene geocentrische Länge λ wird offenbar von dem mittleren, bloss durch die Präcession afficirten Frühlingspuncte gezählt, daher man bey der Aufsuchung des Werthes von $\odot$ aus den Sonnentafeln die letzte vom ☊ abhängige Grösse, oder die Nutation, ganz weglässt, um beyde Längen, die der Sonne und des Planeten, von dem mittleren Äquinoctium zu zählen.

Will man aber, was der gewöhnliche Zweck dieser Rechnungen ist, die gefundenen tabellarischen Orte des Planeten mit den unmittelbar beobachteten Orten desselben vergleichen, um dadurch den Fehler der Tafeln, und (nach Seite 162) die Verbesserung der Elemente zu erhalten, so wird man erstens der Grösse λ die Nutation der Länge hinzufügen, die (Seite 75) gleich $-\ 16.''8$ Sin ☊ ist, und zweytens der Grösse λ sowohl als π die Aberration hinzusetzen. Nennt man $\Delta\lambda$ und $\Delta\pi$ die tägliche Änderung von λ und π in Secunden ausgedrückt, so ist (Seite 87) die Aberration der Länge $-\ 0.00571\ \rho . \Delta\lambda$, und die der Poldistanz $-\ 0.00571\ \rho . \Delta\pi$, wo für abnehmende Längen und Poldistanzen $\Delta\lambda$ und $\Delta\pi$ negativ wird. Wir haben daher für die scheinbare g e o c e n t r i s c h e Länge und Poldistanz des Planeten

$$\lambda' = \lambda - 16.''8 \text{ Sin } ☊ - 0.00571\ \rho . \Delta\lambda,$$
$$\pi' = \pi - 0.00571\ \rho . \Delta\pi.$$

8. §. Mit diesen scheinbaren Grössen λ' und π' sollen nun die beobachteten Orte des Planeten verglichen werden. Allein die Beobachtungen werden von den Astronomen, nicht in Beziehung auf die Ecliptik, sondern in Beziehung auf den Äquator, oder durch Rectascension und Declination, und zwar gewöhnlich so angegeben, wie sie unmittelbar aus den Beobachtungen folgen, indem sie dieselben bloss von der Wirkung der Refraction befreyen. Diese beobachtete Rectascension A und Poldistanz P enthält daher noch die Störungen, welche die Aberration, die Nutation und die Parallaxe hervorbringen. Die beyden ersten dieser Störungen können hier unberücksichtigt bleiben, da wir schon oben (§. 7.) bey der Bestimmung der Grössen λ' und π' darauf Rücksicht genommen haben. Die Wirkung der Parallaxe aber muss noch weggebracht werden. Nennt man t die Sternzeit der Beobachtung, ϖ die Horizontalparallaxe des Planeten, und φ die geocentrische Polhöhe, so erhält man die von der Parallaxe befreyte Rectascension A' und Poldistanz P' durch die Gleichungen (Seite 97)

$$A' = A - \varpi \frac{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}(A - t)}{\operatorname{Sin} P},$$

$$P' = P - \varpi (\operatorname{Sin} P \operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Cos} P \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}(A - t)).$$

Ist die Beobachtung, wie gewöhnlich, im Meridian angestellt, so ist

$$t = A, \text{ und daher}$$
$$A' = A, \text{ und}$$
$$P' = P + \varpi \operatorname{Cos}(\varphi + P).$$

Um endlich die Resultate der Berechnung aus den Tafeln mit jenen der Beobachtung vergleichen zu können, muss entweder die vorhergehende berechnete scheinbare Längen und Ecliptik-Poldistanz λ' und π' auf Rectascension und Poldistanz, oder die vorhergehende beobachtete Rectascension und Poldistanz A', P' auf Länge und Ecliptik-Poldistanz λ'' und π'' gebracht werden, was durch die Gleichungen (Seite 29 folg.) geschieht, wenn man in ihnen die scheinbare Schiefe der Ecliptik

$$e = 23° \, 27' \, 53.''8 - 0.48368 (T - 1800) + 8.''977 \operatorname{Cos} \Omega$$

setzt.

In unserem Beyspiele für die Ceres hat man
Länge des Knotens der Mondsbahn $\Omega = 195° 10'$,
die tägliche Zunahme der geocentr. Länge $\Delta\lambda = 353''$,
und der geocentrischen Poldistanz $\Delta\pi = 473''$,
also ist

	$\lambda = 56° \; 15' \; 1.''0$			$\pi = 91° \; 22' \; 27.''8$
Nutation	$+ 4.4$		Aberration	$+ 8.9$
Aberration	$- 6.7$			$\pi' = 91 \; 22 \; 36.7$
	$\lambda' = 56 \; 14 \; 58.7$			

Die um die oben angeführte Zeit erhaltenen Meridianbeobachtungen aber waren

Rectascension $A = 54° \; 16' \; 10.''3$
Poldistanz $P = 72 \; 0 \; 9.4$,

welcher Werth von P schon von der Wirkung der Refraction befreyt ist.

Die Horizontalparallaxe der Ceres ist $\varpi = 2.''6$, und die Polhöhe $\varphi = 48° \; 12'$, also

$$\varpi \operatorname{Cos}(\varphi + P) = -1.''3,$$

und daher die von der Parallaxe befreyten beobachteten Orte

$$A' = A = 54° \; 16' \; 10.''3$$
$$P' = \quad 72 \quad 0 \quad 8.1.$$

Die scheinbare Schiefe der Ecliptik aber ist

$$e = 23° \; 27' \; 43.''0,$$

und daraus findet man die beobachtete Länge λ'' und Ecliptik-Poldistanz π'' durch die Gleichungen (Seite 29)

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{Sin} A' \operatorname{tg} P',$$

$$\operatorname{tg} \lambda'' = \operatorname{tg} A' \frac{\operatorname{Sin}(e+m)}{\operatorname{Sin} m},$$

$$\operatorname{Cos} \pi'' = \operatorname{Cos} P' \frac{\operatorname{Cos}(e+m)}{\operatorname{Cos} m}.$$

Man erhält $m = 68° \; 11' \; 18.''3$, und

	Länge	Poldistanz
beobachtete	$\lambda'' = 56° \; 15' \; 30.''9$	$\pi'' = 91° \; 22' \; 20.''5$
Es war tab. Länge	$\lambda' = 56 \; 14 \; 58.7$	$\pi' = 91 \; 22 \; 36.7$
Correction der Tafeln	$+ 32.2$	$- 16.2$

9. §. Um das ganze Verfahren bey dieser Vergleichung der Tafeln mit den Beobachtungen zur bequemeren Übersicht darzustellen, wird man also zuerst für die gegebene Beobachtungszeit aus den Tafeln suchen:

Für die Sonne:

die wahre Länge $\odot$ vom mittleren Äquinoctium, oder ohne Nutation,

den Radius Vector R,

und $L = \odot + 180° \; 0' \; 20.''2$.

Für den Planeten:

die wahre heliocentrische reducirte Länge l, ebenfalls vom mittleren Äquinoctium,

die heliocentr. Poldistanz p,

den Radius Vector r,

die Horizontalparallaxe ϖ.

Daraus findet man die geocentrische Länge λ und Poldistanz π, und die Entfernung ρ des Planeten von der Erde durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg}(\lambda - \tfrac{1}{2}(l + L)) = \frac{r \operatorname{Sin} p + R}{r \operatorname{Sin} p - R} . \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(l - L),$$

$$\rho' = (r \operatorname{Sin} p + R) \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(l - L)}{\operatorname{Sin}(\lambda - \frac{1}{2}(l + L))}$$

$$= (r \operatorname{Sin} p - R) \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(l - L)}{\operatorname{Cos}(\lambda - \frac{1}{2}(l + L))},$$

$$\operatorname{Cotg} \pi = \frac{r \operatorname{Cos} p}{\rho'}, \text{ und } \rho = \frac{\rho'}{\operatorname{Sin} \pi}.$$

Ist dann $\Delta\lambda$ und $\Delta\pi$ die tägliche Zunahme der Grössen λ und π in Secunden ausgedrückt, und ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondesbahn, so ist die s c h e i n b a r e geocentrische Länge und Poldistanz des Planeten

$$\lambda' = \lambda - 16.''8 \operatorname{Sin} ☊ - 0.00571 \, \rho . \Delta\lambda, \text{ und}$$

$$\pi' = \pi - 0.00571 \, \rho . \Delta\pi.$$

Ist dann A und P die b e o b a c h t e t e Rectascension und Poldistanz des Planeten, die bloss von der Refraction befreyt ist, und bezeichnet t die Sternzeit der Beobachtung, und φ die Polhöhe, so ist

$$A' = A - \varpi \frac{\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin}(A - t)}{\operatorname{Sin} P},$$

$$P' = P - \varpi (\operatorname{Sin} P \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Cos} P \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos}(A - t)), \text{ und}$$

$$e = 23° \, 27' \, 53.''8 - 0.4837 \, (T - 1800) + 8.''98 \operatorname{Cos} ☊,$$

wo T das Jahr der Beobachtung, und e die scheinbare Schiefe der Ecliptik bezeichnet.

Aus diesen Grössen A′, P′ und e findet man die beobachtete scheinbare geocentrische Länge λ'' und Poldistanz π'' durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{Sin} A' \operatorname{tg} P'$$

$$\operatorname{tg} \lambda'' = \operatorname{tg} A' \frac{\operatorname{Sin}(e+m)}{\operatorname{Sin} m}, \text{ und}$$

$$\operatorname{Cos} \pi'' = \operatorname{Cos} P' \frac{\operatorname{Cos}(e+m)}{\operatorname{Cos} m},$$

und dann sind die gesuchten Correctionen der Tafeln
in geocentrischer Länge $d\lambda = \lambda'' - \lambda'$,
und in geocentrischer Poldistanz $d\pi = \pi'' - \pi'$.

Den 9. Februar 1828 um $2^h\ 9'\ 22.''3$ mittlerer Zeit Wien wurde beobachtet:

Rectascension der Venus $A = 23^h\ 23'\ 47.''79 = 350°\ 56'\ 56.''8$
Poldistanz $P = 95°\ 12'\ 52.''1$ von der Refraction befreyt.

Für diese Zeit findet man aus den Sonnentafeln

1828	280°.075		
o Februar	30.555		
8 Februar	7.885		
2^h	82		
9′	6		
	318.603		0.98700
	1.222	Gleichung der Bahn	o Correction
	—1	Correction	1...A
	—2	...A	—1...B
	—3	...B	o...C
	o	...C	1...D
	1	...D	R = 0.98701
	1	...E	
	o	...F	
	o	...G	
	o	...H	
⊙ =	319.821		

Eben so geben die Tafeln der Venus:

1828	330°.464		0.72388
0 Februar	49.667		0 Correction
8 Februar	12.817		0...A
2^h	0.133		0...B
$9'$	10		— 4...Const
	33.091	r =	0.72384

—0.781 Gleichung der Bahn
3 Correction — Breite = — 2°.304
7...A — hel. Poldistanz = p = 92°.304
1...B — Horizontalparallaxe $\varpi = 6.''2$
0...C
1...D
1...E
1...F
0...G
0...H
— 12 Constante

32.312 wahre Länge in der Bahn
+ 50 Reduction

32.362 wahre Länge in der Ecliptik.

Wir haben daher $L = 139° \; 49' \; 35.''8$,

$\frac{1}{2}(l-L) = -53° \; 43' \; 56.''3$, $\frac{1}{2}(l+L) = 86° \; 5' \; 39.''5$,

$r \operatorname{Sin} p + R = 0.723255$, $r \operatorname{Sin} p - R = -0.263755$,

woraus folgt

$\lambda = 349° \; 38' \; 19.''3$, $\pi = 91° \; 12' \; 4.''5$, und $\log \rho = 0.1423976$.

Die Länge des Mondsknotens ist $\Omega = 209° \; 39'$, und aus den Ephemeriden erhält man

$$\varDelta\lambda = +4430'', \text{ und } \varDelta\pi = -120'',$$

also ist

	$\lambda = 349° \; 38' \; 19.''3$		$\pi = 91° \; 12' \; 4.''5$
Nutation	+ 8.3	Aberration	+ 0.9
Aberration	— 35.1		$\pi = 91 \; 12 \; 5.4$
	$\lambda = 349 \; 37 \; 52.5$		

Da die Beobachtung im Meridian gemacht wurde, so ist $t = A$, und daher

$$\varpi \operatorname{Cos}(\varphi + P) = -5.''0, \text{ also auch}$$

$$A' = A = 350° \; 56' \; 56.''8, \text{ und } P' = 95° \; 12' \; 47.''1,$$

die Grösse T = 1828.11 gibt e = 23° 27′ 32.″4, und daraus folgt m = 59° 53′ 13.″9, und

beobachtete λ'' =	349°	38′	5.″1	π'' =	91°	12′	8.″6
tabellarisch λ' =	349	37	52.5	π' =	91	12	5.4
Correction der Tafeln $d\lambda$ =			+ 12.6	$d\pi$ =			+ 3.2

10. §. Auf eine ähnliche Art wird man auch die Conjunctionen und Oppositionen der Planeten mit der Sonne behandeln. Da diese Beobachtungen unmittelbar die heliocentrische Länge der Planeten geben, so sind sie zur Correction der Tafeln sehr geschickt, daher man sie auch vorzugsweise zu diesem Zwecke gebraucht. Um das hier anzuwendende Verfahren durch ein Beyspiel deutlich zu machen, wollen wir folgende Beobachtungen der Pallas wählen.

1804	mittlere Zeit Mailand			beobachtete Rectascension A			beobachtete Poldistanz P		
29 August	11h	41′	35″	335°	19′	58.″1	84°	49′	30.″1
30	11	36	54	333	8	35.9	85	1	17.3
31	11	32	13	332	57	17.7	85	13	14.3

Diese Beobachtungen sind bloss von der Refraction befreyt. Die Höhenparallaxe ist 2.″4, und die scheinbare Schiefe der Ecliptik 23° 27′ 55.″5. Damit erhält man folgende scheinbare beobachtete Längen und Ecliptik-Poldistanzen

	λ''			π''		
29 August	337°	11′	47.″6	74°	53′	18.″7
30	336	56	23.8	75	0	5.9
31	336	40	59.7	75	7	5.7

Um nun auch die tabellarische scheinbare Länge λ' und Poldistanz π' für diese drey Beobachtungszeiten zu erhalten, wollen wir folgende Elemente der Pallas zum Grunde legen.

Epoche 1803	221° 29′ 32.″0 Meridian von Seeberg
log halbe grosse Axe	0.4423790
Länge des aufsteigenden Knotens 1803	172° 28 13.7
Neigung der Bahn	34 38 1.1
Excentricität	0.2457396
Länge d. Perihels 1803	121 17 34.4
tägliche tropische Bewegung	770.″0446

Sucht man aus diesen Elementen die geocentrische Länge und Breite, und bringt an dieselbe an

die Nutation der Länge	$-13.''7$
Aberration der Länge	-12.4
Aberration der Poldistanz	$+5.2$,

so erhält man

	scheinbare tabellarische Länge λ'			scheinbare tabellarische Poldistanz π'		
29 August	337°	4′	18.″5	74°	51′	5.″2
30	336	48	53.9	74	57	52.0
31	336	33	29.6	75	4	47.6

Man hat daher für die Correction der Tafeln

$d\lambda = \lambda'' - \lambda' = +$	7′	29.″1	$d\pi = \pi'' - \pi' = +$	2′	13.″5
	7	29.9		2	13.9
	7	30.1		2	18.1
Mittel $d\lambda = +$	7′	29.″7	Mittel $d\pi = +$	2′	15.″2

Die Länge der Sonne aber ist für die Zeiten der zwey ersten Beobachtungen

29 August	$\odot =$	156°	18′	33.″6
30	$\odot' =$	157	16	28.8,

also auch die Länge der Erde, oder $L = \odot + 180° \; 0' \; 20.''5$

29 August	$L =$	336°	18′	54.″1
30	$L' =$	337	16	49.3
Differenz	$=$	0	57	55.2

Man sieht daraus, dass die Zeit der Opposition zwischen die erste und zweyte Beobachtung fällt. Sucht man daher für diese beyden Zeiten die durch die bereits bekannten Correctionen $d\lambda$ und $d\pi$ verbesserten Längen und Poldistanzen des Planeten, so hat man

	beobachtete Zeiten	verbesserte Längen	verbesserte Poldistanz
29 Aug.	$t = 11^h \, 41' \, 35''$	$\lambda = 337° \, 11' \, 48.''2$	$\pi = 74° \, 53' \, 20.''4$
30	$t' = 11 \; 56 \; 54$	$\lambda' = 336 \; 56 \; 23.6$	$\pi' = 75 \; 0 \; 7.2$
Differ.	$\Delta t = 23 \; 55 \; 19$	$\Delta\lambda = -15 \; 24.6$	$\Delta\pi = +6 \; 46.8$

Diess vorausgesetzt, hat man für die Zeit T der Opposition mit den letzten Werthen von λ, λ' und π, π'

$$T = t + \frac{(\lambda - L) \triangle t}{\triangle L - \triangle \lambda} = t' + \frac{(\lambda' - L) \triangle t}{\triangle L - \triangle \lambda},$$

und für diese Zeit der Opposition ist die heliocentrische (oder was dasselbe ist), die geocentrische Länge des Planeten

$$\varLambda = L + (T - t) \frac{\triangle L}{\triangle t} = L' + (T - t') \frac{\triangle L}{\triangle t},$$

oder auch

$$\varLambda = \lambda - (T - t) \frac{\triangle \lambda}{\triangle t} = \lambda' - (T - t') \frac{\triangle \lambda}{\triangle t},$$

und die geocentrische Distanz vom Pol der Ecliptik

$$\varPi = \pi + (T - t) \frac{\triangle \pi}{\triangle t} = \pi' + (T - t') \frac{\triangle \pi}{\triangle t}.$$

In unserem Beyspiele ist

$\lambda - L = 52.'902$, $\varDelta L - \varDelta \lambda = 73.'330$, $\varDelta t = 23^h.92195$,

also Zeit der Opposition $T =$ 30. August $4^h\ 57'\ 3.''3$ mittlerer Zeit Mailand.

heliocentrische oder geocentrische Länge $\varLambda = 337°\ 0'\ 41.''2$

geocentrische Poldistanz $\varPi = 74\ 58\ 13.9$

und diesen Resultaten kann man noch die beyden Bedingungsgleichungen für die Correctionen der einzelnen Elemente hinzufügen, welche wir Seite 163 gegeben haben.









